

Friedrich-Schiller-Universität Jena
Physikalisch-Astronomische Fakultät
Theoretisch-Physikalisches Institut



seit 1558

Multipolmomente axialsymmetrisch stationärer Raumzeiten und die Quadrupol-Vermutung

Diplomarbeit

zur Erlangung des
akademischen Grades eines
Diplom-Physikers (Dipl.-Phys.)

vorgelegt von Robert Filter,
geboren am 10.08.1982 in Grevesmühlen

Jena, 13. November 2008

1. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. R. Meinel

2. Gutachter: Dr. rer. nat. A. Kleinwächter

Tag der Verleihung des Diploms:

Für Johannes.

Inhaltsverzeichnis

Einführung	5
Teil 1. Grundlagen	7
Kapitel 1. Newton'sche Momente	9
1.1. Der Multipolbegriff im flachen Raum	9
1.2. Bemerkungen zum Spurbegriff symmetrischer Tensoren	10
1.3. Kompaktifizierung des flachen Raumes	14
Kapitel 2. Mathematische Begriffe	16
2.1. Reduktion der Raumzeit bei Stationarität	16
2.2. Asymptotisch flache Raumzeiten	20
Kapitel 3. Geroch-Hansen-Momente stationärer Raumzeiten	22
3.1. Einführung der Potentiale	22
3.2. Definition der Momente	24
3.3. Äquivalenz zu anderen Definitionen	25
3.4. Einige Aussagen der Momente	26
3.5. Zu Erhaltungsgrößen	27
Teil 2. Die Berechnung nach Fodor et al.	29
Kapitel 4. Vorüberlegungen	31
4.1. Kompaktifizierung Axialsymmetrischer Raumzeiten	31
4.2. Die Ernst-Gleichung	32
4.3. Das Potential ϕ	33
4.4. Fodor'sche Momente	33
4.5. Ausnutzung der Axialsymmetrie	35
4.6. Die konforme Ernst-Gleichung	35
Kapitel 5. Algorithmus und Ergebnisse	38
5.1. Der Potenzreihenansatz	38
5.2. Herleitung des Algorithmus	41
5.3. Ergebnisse	47
Teil 3. Die Quadrupol-Vermutung	49
Kapitel 6. Formulierung und analytische Hinweise	51

6.1. Die Kerr-Raumzeit	51
6.2. Formulierung der Vermutung	52
6.3. Analytische Tests	53
Kapitel 7. Zum numerischen Verfahren	57
7.1. Voraussetzungen und Einschränkungen	57
7.2. Die Bestimmung des Quadrupolmoments	58
7.3. Tests der Berechnung	66
Kapitel 8. Berechnungen	69
8.1. Sterne konstanter Dichte	69
8.2. Vollständig degeneriertes, ideales Neutronengas	70
8.3. Quarksterne nach dem MIT-Bag-Modell	71
8.4. Homogene Ringkörper	72
Zusammenfassung der Ergebnisse	73
Ausblick	74
Danksagung	76
Anhang	77
Anhang A. Explizite Multipolmomente	78
Anhang B. Formeln zur starr rotierenden Staubscheibe	81
Anhang C. Notation und Einheiten	83
C.1. Zur Notation	83
C.2. Umrechnung	84
Literaturverzeichnis	86
Selbständigkeitserklärung	89

Einführung

Multipolmomente spielen in der theoretischen und angewandten Physik eine große Rolle. Dies wird bei der Herleitung der Abstrahlcharakteristik bewegter Ladungen in der Elektrodynamik, der Klassifizierung von Atomen und Molekülen in der Chemie und der groben Bestimmung der Form von Atomkernen in der Kernphysik deutlich. Auch für die computergestützte Physik ergaben sich viele nützliche Einsichten. So ist etwa der “Fast Multipole Algorithm” zur Modellierung von n-Körper-Problemen unter den zehn besten Algorithmen des vergangenen Jahrhunderts aufgeführt, siehe [DS00]. Multipolmomente zu betrachten, das heißt Effekte gegeneinander abzuschätzen, Interaktionen zu approximieren.

Der Erfolg von Methoden, die Multipolmomente in der klassischen Physik einsetzen, ist nicht zuletzt darin begründet, dass jeder Term einer solchen Entwicklung Lösung der entsprechenden Potentialgleichung ist. Eine Verknüpfung von Feldern auf der einen und Quellen auf der anderen Seite ist in der allgemeinen Relativitätstheorie (ART) jedoch nur in linearisierter Theorie bekannt. Warum also Multipolmomente betrachten?

Jede neue analytische oder numerische Lösung ist ohne Interpretation nichts weiter als ein mathematisches Konstrukt, da nicht klar ist, ob eine realistische physikalische Situation beschrieben wird oder gar eine schon vorhandene Lösung reproduziert wurde. Daher sind invariante Charakterisierungen von Lösungen wichtig, es gibt jedoch kein kanonisches Verfahren. Ein bekannter Ansatz ist etwa die Petrov-Klassifizierung nach den Eigenschaften des Weyl-Tensors. Wie ist eine solche Klassifizierung physikalisch interpretierbar? Ist es möglich, Raumzeiten anhand der Charakterisierung zu vergleichen, zum Beispiel im Fernfeld?

Für stationäre und asymptotisch flache Raumzeiten existieren mehrere äquivalente und invariante Definitionen von Multipolmomenten in der allgemeinen Relativitätstheorie. Es konnte gezeigt werden, dass weit entfernt von der Quelle zwei Raumzeiten identisch sind, wenn ihre Momente konvergieren. Das heißt, diese Momente sind eine Möglichkeit, Raumzeiten invariant zu charakterisieren. Darüber hinaus sind sie durch den bekannten Newton’schen Grenzfall anschaulich interpretierbar.

Eine Übertragung der Momente auf die Gravitationstheorie nach Einstein ist nicht trivial. Der erste Teil der Arbeit beginnt daher zuerst mit dem Multipolbegriff in der Newton’schen Theorie der Gravitation. Mit den nötigen mathematischen

Hilfsmitteln sollen danach die Momente nach Geroch und Hansen als natürliche Verallgemeinerung des nichtrelativistischen Begriffs dargestellt werden.

Etwa zwanzig Jahre nach dieser Definition wurde durch Fodor, Hoenselaers und Perjés ein Algorithmus zur expliziten Berechnung der Momente bei zusätzlicher Axialsymmetrie vorgestellt. Sie stellen dabei die Verbindung zum Ernst-Formalismus her, in dem das Vakuumfeld durch eine komplexwertige Funktion beschrieben wird. Die Arbeit von Fodor et al. ist an vielen Stellen schwer nachvollziehbar, da die auftretenden, mitunter langwierigen Rechnungen nicht explizit aufgeführt werden. Um die Richtigkeit des Algorithmus zu überprüfen, wurden daher alle Schritte und Annahmen im zweiten Teil der Arbeit nachvollzogen und wenn nötig ergänzt. Auf dieser Grundlage konnte das Verfahren implementiert und die Ergebnisse bestätigt werden. Zusätzlich wurde das elfte Moment berechnet, welches die gleiche Struktur besitzt wie alle vorher bekannten. Da die entstehenden Ausdrücke relativ lang werden, sind sie im Anhang dargestellt.

Die Gravitationstheorie nach Einstein ist die beste bekannte Theorie der Gravitation. Das Feld wird beschrieben durch die Lösung der Einsteingleichungen, einem System aus gekoppelten, nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Es sind nur wenige physikalisch relevante analytische Lösungen bekannt. Aufgrund der Nichtlinearität der Theorie ist es auch für die Zukunft nicht zu erwarten, dass viele neue strenge Ergebnisse hinzukommen werden. Die computergestützte Simulation von Raumzeiten hat daher einen hohen Stellenwert in der Forschung eingenommen. Im Idealfall können so Hinweise auf allgemeine Zusammenhänge gesammelt werden, die im Anschluss zu beweisbaren Aussagen führen. Mit Hilfe von Simulationen axialsymmetrisch stationärer Raumzeiten konnte im Rahmen dieser Arbeit eine neue Vermutung, die "Quadrupol-Vermutung", für rotierende Flüssigkeitskörper aufgestellt werden. Im dritten Teil wird diese vorgestellt und anhand von analytischen Lösungen motiviert. Die systematischen numerischen Untersuchungen werden im Anschluss dargelegt.

Neben expliziten Formeln, die im eigentlichen Text unpassend wären, finden sich im Anhang Anmerkungen zur Notation und Einheitenrechnung.

Teil 1

Grundlagen

Die Definition von invarianten Multipolmomenten in der allgemeinen Relativitätstheorie war lange ein offenes Problem. So ist es nicht verwunderlich, dass die resultierende geometrische und damit koordinatenfreie Version nach Geroch und Hansen Anfang der siebziger Jahre des vergangenen Jahrhunderts auf den ersten Blick nicht sehr verständlich erscheint.

Ziel des ersten Teils ist es, die eingeführten Begriffe anschaulich zu erklären und als direkte Verallgemeinerung der Newton'schen Momente darzustellen.

Das erste Kapitel wird den Multipolbegriff im flachen Raum kurz wiederholen und danach eine Verbindung zwischen den Legendrepolyomen und dem Spurbegriff herstellen. Es wird eine alternative Berechnung der Multipole vorgestellt, welche als Motivation der allgemeinrelativistischen Definition angesehen werden kann. Das folgende Kapitel legt die notwendigen mathematischen Grundlagen zur Einführung der Momente. Dazu gehören Ausführungen zu den Konsequenzen der Stationarität und zum Begriff der asymptotischen Flachheit. Die Momente nach Geroch-Hansen werden im abschliessenden Kapitel eingeführt und einige wichtige Aussagen der Momente diskutiert. Dazu wird Bezug genommen auf die Äquivalenz zu anderen Definitionen und den Zusammenhang von Multipolmomenten und Erhaltungsgrößen.

Newton'sche Momente

1.1. Der Multipolbegriff im flachen Raum

Im Grenzfall schwacher Felder und kleiner Geschwindigkeiten gehen die Einsteinschen Feldgleichung über in die Newton'sche Formulierung der Gravitation mit der bekannten Feldgleichung

$$\Delta U(\vec{r}) = 4\pi G\mu(\vec{r})$$

mit der Gravitationskonstante G , dem Gravitationspotential U und der Massendichte μ , analog zur Poissongleichung der Elektrostatik. Die Lösung ist durch die Greensfunktion des Laplaceoperators bekannt bis auf Randterme und Lösungen der Laplacegleichung $\Delta U(\vec{r}) = 0$:

$$(1.1.1) \quad U(\vec{r}) = -G \int \frac{\mu(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Diese Gleichung soll Quellendarstellung von U heißen. Für eine inselartige Materieverteilung lohnt sich die Entwicklung von $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ nach den Legendrepolyomen $P_l(\cos \Theta)$, wobei Θ den Winkel zwischen \vec{r} und \vec{r}' bezeichnet. Man kommt in natürlicher Weise zu dem, was man für $r \gg r'$ als klassische Multipolentwicklung bezeichnen könnte:

$$(1.1.2) \quad \begin{aligned} U(\vec{r}) &= -G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos \Theta) \mu(\vec{r}') dV' \\ &= -G \left[\frac{\int \mu(\vec{r}') dV'}{r} + \frac{\int r' \cos \Theta \mu(\vec{r}') dV'}{r^2} + \right. \\ &\quad \left. \frac{\int r'^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \Theta - 1) \mu(\vec{r}') dV'}{r^3} + \dots \right] \\ &= -G \left[\frac{M}{r} + \frac{\sum_{i=1}^3 x_i M_i}{r^3} + \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^3 \frac{M_{ij} x_i x_j}{r^5} + \dots \right]. \end{aligned}$$

Die Masse M , das Dipolmoment M_i und das Quadrupolmoment M_{ij} sind gegeben sind durch

$$\begin{aligned} M &:= \int \mu(\vec{r}') dV', \\ M_i &:= \int x'_i \mu(\vec{r}') dV', \\ M_{ij} &:= \int (3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}) \mu(\vec{r}') dV', \end{aligned}$$

wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ den Abstand zum Ursprung darstellt. Eine analoge, vielleicht sogar etwas elegantere Formulierung erhält man bei der Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen in Kugelkoordinaten (r, θ, φ) mittels

$$U(\vec{r}) = -G \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{q_{lm}}{r^{l+1}} Y_{lm}(\theta, \Phi),$$

wobei

$$q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \mu(\vec{r}') r'^l \bar{Y}_{lm}(\theta', \varphi') dV'$$

die sphärischen Multipolmomente darstellen. Zwar sind die Momente nicht identisch, jedoch beschreiben sie physikalisch die selbe Situation: eine Entwicklung des Potentials in Potenzen von $\frac{1}{r}$, wobei jeweils die Darstellung von $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ nach dem entsprechenden Funktionensystem ausgenutzt wurde.

Weiterhin kann an der Darstellung der Kugelflächenfunktionen

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &\sim P_{lm}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \\ P_{l0}(x) &= P_l(x) \end{aligned}$$

mit den bekannten assoziierten Legendrepolynomen P_{lm} erkannt werden, dass im Falle einer axialsymmetrischen Massendichte $\partial_\varphi \mu = 0$ wegen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} d\varphi = \delta_{m,0} \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

die q_{lm} nur noch Anteile in $m \equiv 0$ haben können. Bei Beachtung aller Vorfaktoren folgt dann

$$U(\vec{r}) = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n P_n(\cos \theta)}{r^{n+1}}$$

mit $M_n := \frac{1}{n!} M_{\underbrace{z \dots z}_n}$. Auf dem positiven Teil der Symmetrieachse, $A^+ := \{(\rho, z) : \rho = 0, z > 0\}$ können wegen $P_l(1) = 1$ alle Momente als Entwicklungskoeffizienten von U abgelesen werden:

$$(1.1.3) \quad U|_{A^+} = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M_n}{z^{n+1}}.$$

Die selbe Konstruktion wird bei der Bestimmung der relativistischen Multipolmomente axialsymmetrisch stationärer Raumzeiten eine tragende Rolle spielen.

1.2. Bemerkungen zum Spurbegriff symmetrischer Tensoren

Die sphärischen Momente entsprechen einer irreduziblen Darstellung mit $2l+1$ Elementen in l -ter Stufe, wohingegen die kartesischen $(l+1)(l+2)/2$ Elemente aufweisen, siehe z.B. [Jac98]. Sie können daher nicht unabhängig voneinander sein. Diese Eigenschaft wird zum einen durch die offensichtliche Symmetrie und die nicht

so offensichtliche Spurfreiheit ausgedrückt. Da es in den entsprechenden Lehrbüchern keine dem Autor bekannte ausführliche Darstellung des Sachverhaltes gibt, soll hier der Begriff der Spurfreiheit für symmetrische Tensoren behandelt werden.

1.2.1. Die Spur eines Tensors.

DEFINITION 1.2.1. Die Spur eines r -fach kovarianten Tensors T mit $r \geq 2$ ist ein $(r-2)$ -fach kovarianter Tensor. Sei g die Metrik des betrachteten Raumes, dann ist die Spur gegeben als

$$(1.2.1) \quad Tr(T) := g^{ab} T_{(abc\dots d)} dx^c \otimes \dots \otimes dx^d,$$

wobei runde Klammern totale Symmetrisierung bedeuten,

$$T_{(I)} := \frac{1}{\text{card}(I)!} \sum_{I'=\text{Perm}(I)} T_{I'}.$$

Ein Tensor T heißt spurfrei, wenn

$$(1.2.2) \quad Tr(T) = 0$$

gilt.

BEISPIEL 1.2.2. Klassisches Oktupolmoment

In Newton'scher Theorie ist im Kartesischen $g_{ij} = \delta_{ij}$. Die klassische Multipolentwicklung war definiert als

$$(1.2.3) \quad U(r) = -G \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \int r'^l P_l(\cos \Theta) \mu(\vec{r}') dV'$$

$$(1.2.4) \quad = -G \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{M_{i_1 \dots i_n} x^{i_1} \dots x^{i_n}}{r^{2n+1}}.$$

Im Folgenden soll das Oktupolmoment berechnet und seine Spurfreiheit gezeigt werden. Es ist $P_3(\cos \Theta) = \frac{1}{2} (5 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta)$ und damit

$$\begin{aligned} \frac{1}{3!} \frac{M_{ijk} x^i x^j x^k}{r^7} &= \frac{1}{r^4} \int r'^3 \frac{1}{2} (5 \cos^3 \Theta - 3 \cos \Theta) \mu(\vec{r}') dV', \\ M_{ijk} x^i x^j x^k &= 3 \cdot r^3 \int r'^3 \left(5 \frac{x^i x'_i x^j x'_j x^k x'_k}{r'^3 r^3} - 3 \frac{x^i x'_i}{r' r} \right) \mu(\vec{r}') dV' \\ &= 3 \cdot \int (5 \cdot x^i x'_i x^j x'_j x^k x'_k - 3 r^2 r'^2 x^i x'_i) \mu(\vec{r}') dV' \\ &= 3 \cdot \int (5 \cdot x'_i x'_j x'_k - 3 r'^2 g_{(ij} x'_{k)}) \mu(\vec{r}') dV' \cdot x^i x^j x^k, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt auf die Symmetrie geachtet wurde. Demzufolge ist

$$M_{ijk} = 3 \cdot \int (5 \cdot x_i x_j x_k - r^2 (g_{ij} x_k + g_{ki} x_j + g_{jk} x_i)) \mu(\vec{r}') dV.$$

Schlussendlich folgt

$$\begin{aligned} \text{Tr}(M)_k &= g^{ij} M_{ijk} \\ &= 3 \cdot \int (5 \cdot x^j x_j x_k - r^2 (3x_k + x_k + x_k)) \mu(\vec{r}) dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

und somit ist das klassische Oktupolmoment wie erwartet spurfrei.

1.2.2. Der spurfreie Teil eines symmetrischen Tensors. In manchen Lehrbüchern findet man als Definition der Momente

$$\hat{M}_{i_1 \dots i_n} := \int x_{i_1} \dots x_{i_n} \mu(\vec{r}) dV.$$

Dies ist eine gerechtfertigte Variante, jedoch muss bei der Interpretation darauf geachtet werden, dass eine entsprechende Entwicklung des Potentials mit Hilfe der \hat{M} eine etwas kompliziertere Form hat als Gleichung 1.2.3. Der offensichtliche Unterschied zwischen den so definierten Momenten und den mit Hilfe der Zerlegung nach Legendrepolyomen konstruierten besteht in der Spurfreiheit letzterer. Die $M_{i \dots j}$ haben dabei die Struktur

$$\begin{aligned} M_{i_1 \dots i_n} &\sim \int [x_{i_1} \dots x_{i_n} + \text{symm. Terme in } g_{ij}, r \text{ und } x_i] \mu(\vec{r}) dV \\ &= \hat{M}_{i_1 \dots i_n} + \int [\text{symm. Terme in } g_{ij}, r \text{ und } x_i] \mu(\vec{r}) dV \end{aligned}$$

Deshalb drängt sich die Idee auf, die $M_{i_1 \dots i_n}$ als spurfreien Teil der $\hat{M}_{i_1 \dots i_n}$ zu interpretieren. Die Legendrepolyome können dann als Vorschrift genommen werden, den spurfreien Anteil eines Tensors zu extrahieren. Es war beispielsweise das Oktupolmoment

$$M_{ijk} = 3 \cdot \int (5 \cdot x_i x_j x_k - 3 \cdot r^2 g_{(ij} x_k)) \mu(\vec{r}) d^3 V,$$

somit kann man den spurfreien Teil eines dreifach kovarianten und symmetrischen Tensors T_{ijk} sofort angeben, indem man $\int x_i x_j x_k \mu(\vec{r}) d^3 V$ mit T_{ijk} ersetzt und die Vorfaktoren anpasst:

$$T_{ijk}^{\text{TF}} = T_{ijk} - \frac{3}{5} \cdot g_{(ij} T_{k)ab} g^{ab}.$$

Denn nach Gleichung 1.2.1 ist

$$\begin{aligned} \text{Tr}(T^{\text{TF}})_k &= g^{ij} T_{ijk} - \frac{1}{5} \cdot g^{ij} (g_{ij} T_{ka}{}^a + g_{ki} T_{ja}{}^a + g_{jk} T_{ia}{}^a) \\ &= T_{ka}{}^a - \frac{1}{5} (3 \cdot T_{ka}{}^a + T_{ka}{}^a + T_{ka}{}^a) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dies ist die Motivation für folgende Aussage:

LEMMA 1.2.3. *Sei (M, g) ein dreidimensionaler Riemann'scher Raum mit $g^{ab}g_{ab} = 3$. Sei T ein $n \geq 2$ -facher kovarianter symmetrischer Tensor. Dann ist sein spurfreier Teil gegeben durch*

$$(1.2.5) \quad \begin{aligned} T_{i_1 \dots i_n}^{\text{TF}} &= T_{i_1 \dots i_n} + A_2^n \cdot g_{(i_1 i_2} T_{i_3 \dots i_n)} g^{ab} \\ &+ A_4^n \cdot g_{(i_1 i_2} g_{i_3 i_4} T_{i_5 \dots i_n)} g^{ab} g^{cd} \\ &+ \dots + A_n^n g_{(i_1 i_2} \dots g_{i_{n-1} i_n)} T_{ab \dots cd} g^{ab} \dots g^{cd} \end{aligned}$$

Die A_i^n sind dabei wie folgt bestimmt durch die Taylorkoeffizienten der Legendrepolynome $P_n(x)$. Sei

$$P_n(x) =: \sum_{i=0}^n a_i^n x^{n-i}.$$

Dann ist

$$(1.2.6) \quad \begin{aligned} A_i^n &:= \frac{a_i^n}{a_0^n} \\ &= (-1)^{i/2} \frac{n! \cdot (2n-i-1)!!}{i!! \cdot (n-i)! \cdot (2n-1)!!}. \end{aligned}$$

BEWEIS. Die Formel von Rodriguez zur Darstellung der Legendrepolynome lautet

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

Diese führt auf die explizite Darstellung

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \cdot \sum_{i=0,2,\dots}^n (-1)^{i/2} \frac{n! \cdot (2n-i-1)!!}{i!! \cdot (n-i)! \cdot (2n-1)!!} \cdot x^{n-i} \\ &= \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} \cdot \sum_{i=0,2,\dots}^n A_i^n \cdot x^{n-i}. \end{aligned}$$

Die Beweisidee ist, dass ein Ansatz in Form von Gleichung 1.2.5 mit noch unbekanntem Koeffizienten A_i^n die im Lemma gegebenen Vorfaktoren ergibt, wenn man fordert, dass mit

$$g^{i_1 i_2} T_{i_1 i_2 \dots i_n}^{\text{TF}} \stackrel{!}{=} 0$$

die Spur des spurfreien Teils von T verschwindet. Nach Fodor [FHP89] führt dies mit $\tilde{A}_i^n := A_{i/2}^n$ auf die Bedingung

$$\tilde{A}_{k+1}^n = -\frac{(n-2k)(n-2k-1)}{2(k+1)(2n-2k-1)} \tilde{A}_k^n,$$

was bei $\tilde{A}_0^n = 1$ und ausgeführter Rekursion die A_i^n aus Gleichung 1.2.6 ergibt¹. \square

¹Die durch Fodor [FHP89] angegebene Form der \tilde{A} ist identisch, wenn man beachtet, dass $k!! = 2^k k!$ gilt.

Jetzt gelingt es auch, den Zusammenhang zu den \hat{M} formal herzustellen.

$$\begin{aligned} M_{i_1 \dots i_n} &= n! \cdot a_0^n \cdot \hat{M}_{i_1 \dots i_n}^{\text{TF}} \\ &= n! \cdot a_0^n \cdot \int [x_{i_1} \dots x_{i_n}]^{\text{TF}} \mu(\vec{r}) dV. \end{aligned}$$

Dies kann mit Hilfe der Definition der Momente nach Gleichung 1.1.2 und anschaulich am Beispiel 1.2.2 nachvollzogen werden.

1.3. Kompaktifizierung des flachen Raumes

Außer in linearisierter Näherung ist eine sinnvolle Verknüpfung von geeigneten Potentialen und Quellen in Form einer vierdimensionalen D'Alembert-Poissongleichung oder einer anderen linearen partiellen Differentialgleichung in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht bekannt. Multipolmomente werden nicht mehr die Quellen, sondern die ganze Raumzeit charakterisieren. Als Motivation für die Definition soll in Newton'scher Theorie eine alternative Möglichkeit gesucht werden, die Momente zu berechnen.

Es sei U außerhalb des Trägers von μ gegeben durch

$$U(\vec{r}) = \frac{M}{r} + \frac{M_i x^i}{r^3} + \frac{1}{2!} \frac{M_{ij} x^i x^j}{r^5} + \dots$$

Im Vergleich zu Gleichung 1.1.2 ist der Faktor $-G$ verschwunden und die Einsteinsche Summenkonvention wurde benutzt. Diese Darstellung ist gleichbedeutend mit der Forderung nach Analytizität von U bis auf den Punkt $r = 0$. Die Einführung der Koordinaten $\tilde{x}_i := r^{-2} x_i$ führt auf

$$U(\tilde{x}^a) = \tilde{r} \left(M + M_i \tilde{x}^i + \frac{1}{2!} M_{ij} \tilde{x}^i \tilde{x}^j + \dots \right).$$

Eine Reskalierung der Form

$$\begin{aligned} \tilde{U} &:= r \cdot U \\ &= \tilde{r}^{-1} \cdot U \end{aligned}$$

ergibt

$$\tilde{U}(\tilde{x}^a) = M + M_i \tilde{x}^i + \frac{1}{2!} M_{ij} \tilde{x}^i \tilde{x}^j + \dots$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} M &= \tilde{U}(\tilde{x}^a) \Big|_{\tilde{r}=0}, \\ M_i &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \tilde{U}(\tilde{x}^a) \Big|_{\tilde{r}=0}, \\ M_{ij} &= \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \tilde{U}(\tilde{x}^a) \Big|_{\tilde{r}=0}. \end{aligned}$$

Dies kann auch als Rekursion aufgefasst werden. Definiert man

$$(1.3.1) \quad \begin{aligned} P &:= \tilde{U}, \\ P_{a_1 \dots a_n} &:= \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{a_1}} P_{a_2 \dots a_n} \right]_{\text{STF}}, \end{aligned}$$

sind die M gegeben als

$$(1.3.2) \quad M_{i\dots j} = P_{i\dots j}|_{\tilde{r}=0}.$$

STF für “symmetric and tracefree” bedeutet dabei spurfrei und symmetrisch, was hier jedoch keine zusätzliche Bedeutung hat, da die so eingeführten Momente diese Eigenschaft besitzen.

Durch die Einführung der \tilde{x} -Koordinaten wurde eine Spiegelung am Einheitskreis erreicht. Dies gibt die Möglichkeit, $r = \infty$ in $\tilde{r} = 0$ als normalen Punkt behandeln zu können. Die Reskalierung des Potentials U führte dazu, dass die Momente als Ableitungen des neuen Potentials \tilde{U} in “Unendlich” berechnet werden konnten, was mit Hilfe der P als Rekursion ausgedrückt wurde.

Mathematische Begriffe

2.1. Reduktion der Raumzeit bei Stationarität

Bevor eine Verallgemeinerung des Multipolbegriffs gegeben werden kann, ist es notwendig, einige mathematische Begriffe im Falle von stationären Raumzeiten zu betrachten. Es ist zu erwarten, dass sich in Anwesenheit einer Symmetrie der physikalisch zu betrachtende Raum verkleinert. Im Folgenden soll die Konstruktion der sich ergebenden Mannigfaltigkeit S dargestellt werden. Die induzierte Metrik wird hergeleitet und gefragt, welche mathematischen Eigenschaften physikalische Felder unter diesen Voraussetzungen haben. Darüber hinaus soll anhand der sich ergebenden kovarianten Ableitung auf S begründet werden, warum die Rechnungen auf der ursprünglichen Mannigfaltigkeit M durchgeführt werden können.

2.1.1. Die Mannigfaltigkeit S . Die Reduktion des Raumes wird mathematisch für den stationären Fall formuliert. Die Art und Weise der Definition könnte ohne weiteres auch auf andere Fälle übertragen werden. Dazu kann man etwa die Voraussetzungen an die Metrik und das Killingfeld an die entsprechende Situation anpassen.

DEFINITION 2.1.1. Sei M eine pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit, g die zugehörige Metrik mit Signatur $(-, +, +, +)$. Sei ξ ein zeitartiges Killingvektorfeld auf M , $L_\xi g = 0$ und $g(\xi, \xi) < 0$. Sei $\psi_t(x)$ der zu ξ gehörige Fluss, also dessen einparametrische lokale Gruppe: $\partial_t \psi_t(x)|_{t=0} = \xi(x) \forall x \in M$ und $\psi_0(x) = x$.

Dann sei S die Mannigfaltigkeit aller Trajektorien von ξ auf M , d.h.

$$S := M/\psi_t = \{x, y \in M : x \sim y \Leftrightarrow \exists \tau \in \mathbb{R} : y = \psi_\tau(x)\}.$$

Formal ist es noch nötig, anzumerken, dass der lokale Fluss $\psi_t(x)$ für t nur in einer ϵ -Umgebung erklärt ist. Für $\tau \leq \epsilon$ macht die Definition also keine Probleme. Andernfalls soll ψ_τ folgendermaßen zu verstehen sein: mit $\kappa < \epsilon$ und einem $n \in \mathbb{N}$ sei $\tau = n \cdot \epsilon + \kappa$, so dass $\psi_\tau(x) := (\psi_\kappa \circ (\psi_\epsilon)^n)(x)$. Für $n = 1$ ergibt sich so etwa $\psi_\tau(x) = \psi_\kappa \circ \psi_\epsilon(x) = \psi_\kappa(y) = z$ und damit $x \sim z$. Um die Gruppeneigenschaft der ψ_t ausnutzen zu können, ist es somit wichtig, dass sie auf ganz M definiert sind.

Durch die Definition ist gegeben, dass S eine geringere Dimension als M aufweist, $\dim S = \dim M - \dim \psi_t = \dim M - 1$.

2.1.2. Zerlegung des Raums. Die Konstruktion von S als Quotientenraum entspricht einer Faserung von M . Man kann sich jetzt fragen, welche Tensorfelder T auf M und S gleichwertig sind. Eine sehr anschauliche Bedingung ist, dass sich

T entlang des Flusses von ξ nicht ändern darf oder formal nach Konstruktion $\forall x \sim y : T(x) = T(y)$. Dies ist gleichbedeutend zu $\psi_t^* T(x) = T(x) \forall x \in M, t \in \mathbb{R}$. Das heisst $\partial_t \psi_t^* T(x)|_{t=0} = 0$ bzw.

$$(2.1.1) \quad L_\xi T(x) = 0$$

nach Definition der Lie-Ableitung. Insbesondere muss dies nach Konstruktion auch für die lokalen Koordinaten φ^k auf S gelten:

$$\begin{aligned} 0 &= L_\xi \varphi^k \\ &= \xi^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Dies führt, wie erwartet, dazu, dass das Killingfeld selber im Kern der Abbildung liegt:

$$(2.1.2) \quad \begin{aligned} \varphi_* \xi &= \xi^i \frac{\partial \varphi^k}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^k} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Das bedeutet anschaulich, dass das Tangentialbündel TM zerlegt wird in

$$TM_{\parallel} := \{X \in TM : X = v \cdot \xi\}$$

für eine beliebige reelle Funktion $v(x)$ und

$$TM_{\perp} := TM / TM_{\parallel}.$$

Also lässt sich ein Vektorfeld X wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} X &= X_{\perp} + X_{\parallel} \\ &= X_{\perp} + \frac{g(X, \xi)}{g(\xi, \xi)} \xi. \end{aligned}$$

Damit ist

$$(2.1.3) \quad X_{\perp} = X - \frac{g(X, \xi)}{g(\xi, \xi)} \xi.$$

Offensichtlich gilt, dass $X = X_{\perp}$, wenn $g(X, \xi) = 0$. So kann man die Projektion $P : TM \rightarrow TM_{\perp}$ mit $P(X) := X_{\perp}$ konstruieren. In Koordinaten auf M lautet diese dann

$$(2.1.4) \quad P_a^b := \delta_a^b - \frac{1}{\xi_m \xi^m} \xi_a \xi^b.$$

Analog definiert man die Projektion von Tensorobjekten T durch

$$(2.1.5) \quad P(T) := P_{a'}^a \dots P_b^{b'} T^{a' \dots b'} \partial_a \otimes \dots \otimes dx^b.$$

Damit ist eine Zerlegung der Objekte im Tangential- und Kotangentialbündel nach "senkrecht" und "parallel" zu ξ erfolgt.

2.1.3. Konstruktion der Metrik. Auf S gibt es eine durch die Definition ausgezeichnete induzierte Metrik H . Mit Hilfe der Zerlegung in TM_{\perp} und TM_{\parallel} kann man berechnen, wie die zurückgezogene Metrik von H auf M aussehen muss.

Man fordert, analog zur Konstruktion der induzierten Metrik bei einer Untermannigfaltigkeit, dass $\forall X, Y \in TM$

$$\begin{aligned}
H(X, Y) &\stackrel{!}{=} g(X_{\perp}, Y_{\perp}) \\
&= g(X - X_{\parallel}, Y - Y_{\parallel}) \\
&= g(X, Y) - g(X, Y_{\parallel}) - g(X_{\parallel}, Y) + g(X_{\parallel}, Y_{\parallel}) \\
&= g(X, Y) - \frac{g(Y, \xi)}{g(\xi, \xi)}g(X, \xi) - \frac{g(X, \xi)}{g(\xi, \xi)}g(Y, \xi) + \frac{g(X, \xi)}{g(\xi, \xi)}\frac{g(Y, \xi)}{g(\xi, \xi)}g(\xi, \xi) \\
&= g(X, Y) - \frac{1}{g(\xi, \xi)}g(X, \xi)g(Y, \xi).
\end{aligned}$$

Oder in Koordinaten auf M

$$(2.1.6) \quad H_{ab} = g_{ab} - \frac{1}{\xi_m \xi^m} \xi_a \xi_b.$$

Jetzt steht die von S auf M zurückgezogene Metrik H zur Verfügung. Es wurde in Unterabschnitt 2.1.2 gezeigt, dass $X = X_{\perp}$, wenn $g(X, \xi) = 0$ gilt. Auf TM_{\perp} ist H identisch mit g , da $g(X, \xi)g(Y, \xi) = 0$ für $X, Y \in TM_{\perp}$, also $H(X, Y) = g(X, Y)$ gilt.

2.1.4. Physikalisch äquivalente Felder. Welche Tensorfelder T sind auf M und S gleichwertig? Was für Bedingungen ergeben sich daraus? In Unterabschnitt 2.1.2 wurde vorausgesetzt, dass die Lie-Ableitung in Richtung des zeitartigen Killingfeldes ξ verschwindet. Eine weitere anschauliche Forderung ist, dass die entsprechenden Tensorfelder nur auf den zu ξ senkrechten Teil wirken:

Sei o.B.d.A. $T \in TM \otimes \dots \otimes TM$, $X \in TM$ beliebig und es gelte

$$(2.1.7) \quad T(\dots, g(X, \cdot), \dots) \stackrel{!}{=} T(\dots, Pg(X, \cdot), \dots).$$

Die drei Punkte deuten hier an, dass es sich um eine beliebige Stelle handelt und es ist $g(X, \cdot) := g_{ab}X^a dx^b$. Daraus ergibt sich mit Gleichung 2.1.5

$$\begin{aligned}
Pg(X, \cdot) &= \left(\delta_a^b - \frac{1}{\xi_m \xi^m} \xi_a \xi^b \right) g_{bl} X^l dx^a \\
&= \left(g_{al} - \frac{1}{\xi_m \xi^m} \xi_a \xi_l \right) X^l dx^a \\
&= H(X, \cdot).
\end{aligned}$$

Damit bildet H ab von TM nach T^*M_{\perp} . Es gilt nun unter Voraussetzung von Gleichung 2.1.7

$$T^{\dots a \dots} g_{ab} X^b = T^{\dots a \dots} g_{ab} X^b - \frac{1}{\xi_m \xi^m} T^{\dots a \dots} \xi_a \xi_b X^b.$$

Da X beliebig ist, muss

$$T^{\dots a \dots} \xi_a = 0$$

sein. Ein analoges Argument gilt für $T \in T^*M \otimes \dots \otimes T^*M$ und gemischte Tensoren, also $0 = T^{\dots a \dots \dots b \dots} \xi^a$ und $0 = T^{\dots a \dots \dots b \dots} \xi_b$.

Demzufolge sind alle physikalisch relevanten Tensorfelder T , die nur auf TM_\perp bzw. T^*M_\perp wirken und invariant sind gegenüber dem Fluss des Killingfeldes ξ , gekennzeichnet durch die Gleichungen

$$(2.1.8) \quad \begin{aligned} L_\xi T &= 0, \\ T(\dots, g(\xi, \cdot), \dots) &= 0, \\ T(\dots, \xi, \dots) &= 0. \end{aligned}$$

Das sind demzufolge die Bedingungen, die Tensorfelder erfüllen müssen, wenn sie auf M und S gleichwertig sein sollen. Diese Tensoren sollen in einer Definition zusammengefasst werden:

DEFINITION 2.1.2. Alle Tensorfelder auf M , welche die Gleichungen 2.1.8 erfüllen, bilden den Raum $CS_\perp(M)$.

CS ist dabei die gängige Bezeichnung für Schnitte, englisch “cross-section”.

2.1.5. Zur Kovarianten Ableitung auf S . Zwar ist die kovariante Ableitung mit Hilfe der Metrik schon bekannt, es lohnt sich aber zu untersuchen, wie die Ableitung ∇ auf M und ∇^S auf S , zusammenhängen. Wenn sich, wie erwartet, herausstellt, dass es eine Ableitung D auf M gibt, die ∇^S entspricht mit allen notwendigen Eigenschaften, dann stehen mit den Tensoren aus $CS_\perp(M)$ alle Hilfsmittel zur Verfügung, um die Rechnungen auf M durchführen zu können.

DEFINITION 2.1.3. Sei $T \in CS_\perp(M)$, $X \in TM_\perp$ und P die in Unterabschnitt 2.1.2 angegebene Projektion. Dann ist auf $CS_\perp(M)$ die kovariante Ableitung D definiert durch

$$D_X T := P(\nabla_X T).$$

LEMMA 2.1.4. Sei φ die Abbildung von $M \rightarrow S$. Dann ist die kovariante Ableitung ∇^S auf S gegeben durch:

$$\varphi^* \left(\nabla_{(\varphi_* X)}^S (\varphi_* T) \right) := D_X T.$$

BEWEIS. Die üblichen Anforderungen, wie Linearität, Leibniz-Regel und Metrikkompatibilität werden durch ∇ auf M sichergestellt. Wichtig ist, zu zeigen, dass die Definition von D nicht aus $CS_\perp(M)$ heraus führt. Schnell zu sehen ist, dass $g(\xi, D_X T) = 0$. Dies wird durch die Projektion sicher gestellt. Nicht so klar ist, ob das neue Objekt bezüglich des Flusses von ξ invariant ist, also ob gilt $L_\xi D_X T = 0$.

Sei $T \in TM_\perp$. Da $L_\xi(PT) = P(L_\xi T) = 0$ nach Konstruktion der Projektion, reicht es also zu zeigen, dass $P(L_\xi \nabla_X T) = 0$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned} L_\xi \nabla_X T &= L_\xi (X^l \partial_l T + \Gamma(X, T)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Denn Γ ist eine Funktion von g , deren Lie-Ableitung nach dem Killingvektor ξ nach Voraussetzung verschwindet und Gleiches gilt für $X, T \in TM_\perp$.

Analog gilt die Behauptung für alle $T \in CS_{\perp}(M)$, nicht nur Vektorfelder, da weitere Terme in Γ hinzukommen, deren Lie-Ableitung ebenso verschwindet. \square

Damit ist D tatsächlich die gesuchte Ableitung auf M , die ∇^S auf S entspricht.

Für die mathematisch saubere Begriffsbildung war es nötig, die Mannigfaltigkeit S einzuführen. Jedoch konnte gezeigt werden, dass mit Hilfe der Metrik aus Unterabschnitt 2.1.3 alle Rechnungen auf M durchgeführt werden können, wenn die physikalisch relevanten Felder die Gleichungen 2.1.8 erfüllen. Das bedeutet insbesondere, dass die Abbildung $\varphi: M \rightarrow S$ für praktische Rechnungen nicht benötigt wird.

2.2. Asymptotisch flache Raumzeiten

In der ART ergeben sich, wie in jeder anderen physikalischen Theorie auch, interessante Einsichten, wenn man die Eigenschaften isolierter Systeme betrachtet. Wenngleich kein physikalisches System vom Rest der Welt isoliert sein kann, ist es durchaus wünschenswert, z.B. einen Neutronenstern zu untersuchen und dabei den Einfluss von Materie zu vernachlässigen, die sich weit entfernt vom System befindet. Das heißt, der Stern soll eingebettet sein in eine Raumzeit, die flach wird in großer Entfernung. Asymptotisch flache Raumzeiten stellen somit ideal isolierte Körper in der Relativitätstheorie dar und sollen angelehnt an die Ausführungen durch Wald [Wal84] eingeführt werden.

In Newton'scher Gravitationstheorie ist man ebenso an dem Studium isolierter Massenverteilungen interessiert. In diesem Fall können sofort unter gewissen Abfallbedingungen an die Massendichte Aussagen gewonnen werden über das Gravitationsfeld bei großer Entfernung und es steht eine Multipolentwicklung nach Abschnitt 1.1 zur Verfügung.

Es drängt sich die Frage nach einer Definition von asymptotischer Flachheit in der allgemeinen Relativitätstheorie auf. Das Problem ist die aktive Rolle der Raumzeit. Es gibt keine flache Hintergrundmetrik η mehr, mit deren Hilfe man Abfallbedingungen an das Gravitationsfeld formulieren könnte. Es gibt ausserdem kein ausgezeichnetes Inertialsystem mit bevorzugter radialer Koordinate. Zwar ist es oft ausreichend, eine koordinatenabhängige Definition der Form $g = \eta + f$ mit $f \in O(r^{-1})$ zu geben, sie kann jedoch sehr unpraktisch sein, da die Aussagen jeweils auf Koordinateninvarianz geprüft werden müssen und Probleme für den Limes $r \rightarrow \infty$ auftreten können, insbesondere bei der Vertauschbarkeit des Grenzprozesses mit Ableitungen.

Bildet man die flache Minkowski-Raumzeit durch eine konforme Transformation $\eta \rightarrow \tilde{\eta} = \Omega^2 \eta$ auf eine unphysikalische Raumzeit $\tilde{\eta}$ mit konformem Faktor Ω ab, so findet man, dass diese bei einer bestimmten Wahl von Ω einer berandeten Region des "statischen Einstein Universums" entspricht. Die Möglichkeit dieser Abbildung hängt dabei stark von der Struktur der Minkowski-Raumzeit ab. Dies ist die Motivation, eine Raumzeit als asymptotisch flach zu betrachten, wenn eine

solche konforme Transformation möglich ist und die neue, unphysikalische Raumzeit Eigenschaften hat, die ähnlich der Minkowski-Raumzeit sind, würde man die selbe Transformation an ihr durchführen. Eine solche Herangehensweise ist koordinatenunabhängig und vereinfacht die Behandlung von “ $r = \infty$ ”, da dies durch die konforme Abbildung ein Punkt der neuen, unphysikalischen Raumzeit wird.

Die ursprüngliche Definition asymptotisch flacher Raumzeiten durch Penrose in [Pen64] ist für die Betrachtungen zu Multipolmomenten zu restriktiv, da sie geodätische Vollständigkeit fordert und somit interessante Fälle wie die Kerr-Lösung ausschließt. Deshalb soll hier die Definition nach Geroch [Ger70] verwendet werden. Diese gilt für stationäre Raumzeiten, die wie in Abschnitt 2.1 auf die dort beschriebene dreidimensionale Mannigfaltigkeit S reduziert wurden:

DEFINITION 2.2.1. Ein dreidimensionaler Riemann'scher Raum S mit Metrik h heißt asymptotisch flach, wenn ein Riemann'scher Raum \tilde{S} mit Metrik \tilde{h} existiert, so dass

- (1) $\tilde{S} = S \cup \Lambda$ und Λ ist ein Punkt,
- (2) $\tilde{h} = \Omega^2 h$ ist eine glatte Metrik auf \tilde{S} ,
- (3) in Λ ist $\Omega = 0$, $\nabla_a^{\tilde{S}} \Omega = 0$ und $\nabla_a^{\tilde{h}} \nabla_b^{\tilde{h}} \Omega = 2 \cdot \tilde{h}_{ab}$, wobei $\nabla^{\tilde{h}}$ die kovariante Ableitung zu \tilde{h} ist¹.

Man nennt \tilde{S} den zu S konform kompaktifizierten Raum. Als Beispiel kann bereits die Kompaktifizierung des flachen Raums nach Abschnitt 1.3 angeführt werden.

Leider gibt es keinen Beweis dafür, dass die Existenz dieser Art der konformen Erweiterung von S in irgendeiner Weise einem asymptotischen Verhalten bei stationären Raumzeiten, wie dies etwa in Bondi-Koordinaten nachgerechnet werden kann, äquivalent ist. Man kann nur vermuten, dass aus dem Zutreffen auf alle bekannten Fälle eine allgemeine Beziehung besteht.

Der konforme Faktor wird durch die Definition nicht eindeutig bestimmt, jede positive glatte Funktion ω mit $\omega|_{\Lambda} = 1$ führt auf einen anderen konformen Faktor $\Omega' = \omega \Omega$, der alle Bedingungen der Definition erfüllt. Diese Freiheit wird bei der Definition der relativistischen Momente festgehalten durch die Forderung nach Verschwinden des Massendipolmomentes. Weiterhin ist die Mannigfaltigkeit \tilde{S} nach Geroch [Ger70] bis auf Diffeomorphismen eindeutig.

Es stehen jetzt alle mathematischen Hilfsmittel bereit, die Multipolmomente nach Geroch und Hansen für stationäre Raumzeiten zu definieren.

¹Es reicht nach Geroch [Ger70] hier auch die Proportionalität zu \tilde{h} .

Geroch-Hansen-Momente stationärer Raumzeiten

Eine quellenmäßige Darstellung wie in der klassischen Theorie in Form von Gleichung 1.1.1, die Quellen und Felder in Form einer Laplace- oder D'Alembert-Gleichung verknüpft, ist nicht bekannt. Einzig in linearisierter Näherung steht eine solche Verknüpfung in einer bestimmten Eichung mit kanonisch gewählten Potentialen zur Verfügung, vgl. [Ste04].

In Abschnitt 1.3 wurde eine alternative Methode dargestellt, die klassischen Momente zu berechnen. Diese kann als Motivation gelten, eine ähnliche Konstruktion in der ART zu verwenden. Geroch [Ger71] konnte 1970 so als Erster eine koordinatenfreie Definition von Massenmomenten für statische Raumzeiten entwickeln. Diese wurde 1974 von Hansen [Han73] auf stationäre Raumzeiten verallgemeinert, was einherging mit der Einführung von Strommomenten, die den stationären Anteil repräsentieren.

Dieses Kapitel soll den Multipolbegriff nach Geroch und Hansen erklären. Bevor jedoch die Momente definiert werden können, ist es notwendig, die Wahl der Potentiale zu begründen. Anschließend wird auf den Zusammenhang zu den Momenten nach Simon und Beig [SB83] bzw. zu den stationären Momenten nach Thorne [Tho80] eingegangen, gefolgt von wichtigen Aussagen der Momente.

3.1. Einführung der Potentiale

In Newton'scher Theorie ist die Beschreibung des Feldes vollständig gegeben durch die Angabe des Gravitationspotentials U . Welches Potential wird im Grenzfall U entsprechen und für eine allgemeine Multipoldefinition geeignet sein? Gibt es eine Vielzahl von möglichen Potentialen?

In linearisierter Theorie werden mehrere Potentiale eingeführt und über eine quellenmäßige Darstellung mit dem Energie-Impuls-Tensor verknüpft. Eine solche Situation wird im allgemeinen stationären Fall nicht zu erwarten sein. Da in der ART neben der Masse auch die Ströme eine Rolle spielen, sind zwei verschiedene Sätze von Multipolen und somit zwei unterschiedliche Potentialdefinitionen zu erwarten.

Die Definition der Potentiale nach Geroch-Hansen lautet:

DEFINITION 3.1.1. Sei ξ ein zeitartiger Killingvektor. Sei e^{2U} definiert durch

$$e^{2U} := -g(\xi, \xi)$$

und die Drehung $\omega_a dx^a$ gegeben durch

$$\omega_a = \epsilon_{abcd} \xi^b \nabla^c \xi^d$$

bzw. ${}^*\omega = \xi \wedge \nabla \xi$. Im Vakuumfall ist die Form geschlossen und das Drehpotential b kann eingeführt werden:

$$(3.1.1) \quad \nabla_a b := \omega_a.$$

Dann sind die Massen- und Strompotentiale Φ^M und Φ^J gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi^M &:= \frac{e^{4U} + b^2 - 1}{4e^{2U}}, \\ \Phi^J &:= \frac{b}{2e^{2U}}. \end{aligned}$$

Die Drehung ω_a gibt an, wie stark der zeitartige Killingvektor dreht, beschreibt also in gewisser Weise eine Krümmung der zeitartigen Hyperfläche, die er definiert. Die Interpretation von e^{2U} ist am einfachsten in einem Koordinatensystem, in dem $\xi = \partial_t$ ist. Dann ist offensichtlich $e^{2U} = -g_{tt}$. Im Newton'schen Grenzfall hat die Metrik dann in geeigneten Koordinaten die Gestalt $g_{\text{Newton}} \approx -e^{2U(\vec{r})} dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ und die Potentiale sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi^M &= \frac{e^{4U} - 1}{4e^{2U}} \\ &= \frac{4U + 8U^2 + \dots}{4(1 + 2U + \dots)} \\ &\simeq U, \\ \Phi^J &\equiv 0. \end{aligned}$$

Eine andere Wahl des Massenpotentials, z.B.

$$\Phi^{\text{M,neu}} = \frac{1}{a} \left(a^n (\Phi^M)^n + \sum_{i=1}^{\infty} b_i (\Phi^J)^{in} \right)^{\frac{1}{n}}$$

mit beliebigen reellen Zahlen a und b_i , hätte den selben Newton'schen Grenzwert.

Jedoch stellt Geroch in [Ger71] dar, dass mit der gegebenen Definition beide Potentiale in folgender Weise äquivalent sind. Führt man die neue, mit e^{2U} reskalierte Metrik h auf S ein durch

$$(3.1.2) \quad \begin{aligned} h_{ab} &:= e^{2U} H_{ab} \\ &= e^{2U} g_{ab} + \xi_a \xi_b, \end{aligned}$$

so lassen sich die Feldgleichungen darstellen in den Potentialen Φ^M und Φ^J . Wenn D die zu h gehörige kovariante Ableitung ist, dann gelten die zu den Einsteingleichungen im Vakuum äquivalenten Formulierungen

$$(3.1.3) \quad \begin{aligned} \left(D^a D_a - \frac{R}{8} \right) \Phi^M &= \frac{15}{8} \kappa^4 \Phi^M, \\ \left(D^a D_a - \frac{R}{8} \right) \Phi^J &= \frac{15}{8} \kappa^4 \Phi^J \end{aligned}$$

mit der zugehörigen skalaren Krümmung R und

$$\kappa^4 := \frac{1}{2e^{4U}} [(D^a e^{2U})(D_a e^{2U}) + (D^a b)(D_a b)]$$

sowie dem Ricci-Tensor

$$\begin{aligned} R_{ab} &= 2 [(D_a \Phi^M)(D_b \Phi^M) + (D_a \Phi^J)(D_b \Phi^J)] \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[D_a \sqrt{1 + 4(\Phi^M)^2 + 4(\Phi^J)^2} \right] \left[D_b \sqrt{1 + 4(\Phi^M)^2 + 4(\Phi^J)^2} \right]. \end{aligned}$$

Die Potentiale haben nach den Gleichungen 3.1.3 eine erstaunliche Symmetrie: die Feldgleichungen beider Potentiale sind identisch. Geroch konnte deshalb zeigen, dass bestimmte Transformationen zwischen ihnen zu neuen Lösungen der Einstein-Gleichungen führen. Leider ist in dieser Klasse von Lösungen bestenfalls eine für nicht-leere Raumzeiten asymptotisch flach und somit hier von Interesse.

Das gewünschte Newtonsche Grenzverhalten von Φ^M und die Symmetrie zwischen beiden Potentialen können somit als Motivation für ihre Definition gelten.

3.2. Definition der Momente

Jetzt sind alle Voraussetzungen gegeben, um die Begriffsdefinition der Multipole nach Geroch-Hansen darzulegen. Zum Einen die Mannigfaltigkeit S mit neuer Metrik $h_{ab} = e^{2U} g_{ab} + \xi_a \xi_b$, die Potentiale Φ^M und Φ^J sowie zum Anderen die Möglichkeit der konformen Kompaktifizierung im Falle von asymptotisch flachen Raumzeiten nach Definition 2.2.1 mit konformem Faktor Ω , Metrik $\tilde{h} = \Omega^2 h$ und "konform Unendlich" $\Lambda \hat{=} \{r = \infty\}$.

Die Potentiale können durch Vorgabe der Raumzeit mit Hilfe ihrer Definition 3.1.1 als bekannt angesehen werden. Dies ist eine vergleichbare Situation wie in Abschnitt 1.3 und die folgende Definition der Multipolmomente wird eine natürliche Verallgemeinerung darstellen.

DEFINITION 3.2.1. Seien die konformen Potentiale $\tilde{\Phi}^{M/J}$ gegeben durch

$$\tilde{\Phi}^{M/J} := \frac{\Phi^{M/J}}{\sqrt{\Omega}}$$

und folgende Tensoren rekursiv erklärt

$$\begin{aligned} P^{M/J} &:= \tilde{\Phi}^{M/J}, \\ P_{a_1 \dots a_n}^{M/J} &:= \left[\tilde{D}_{a_1} P_{a_2 \dots a_n}^{M/J} - \frac{(n-1)(2n-3)}{2} \tilde{R}_{a_1 a_2} \tilde{P}_{a_3 \dots a_n}^{M/J} \right]_{\text{STF}}, \end{aligned}$$

wobei STF für den spurfreien und symmetrischen Teil steht und die \tilde{R}_{ij} der Ricci-Tensor zu \tilde{h} sein soll. Dann sind die Multipolmomente in der ART nach Geroch und Hansen für stationäre Raumzeiten definiert als

$$(3.2.1) \quad Q_{a \dots b}^{M/J} := P_{a \dots b}^{M/J} \Big|_{\Lambda}.$$

Die Tensoren $P_{a \dots b}^{M/J}$ sind bezeichnet als Multipoltensoren, die $Q_{a \dots b}^M \equiv M_{a \dots b}$ sollen Massen- und die $Q_{a \dots b}^J \equiv J_{a \dots b}$ Strommomente genannt werden.

Die so definierten Momente sind noch nicht eindeutig, jedoch kann der konforme Faktor Ω fixiert werden, indem das Verschwinden des Massendipolmomentes gefordert wird. Dies ist gleichzeitig eine Verallgemeinerung des Begriffs eines Massen-zentrums.

Warum funktioniert die direkte Verallgemeinerung von Gleichung 1.3.2 mit

$$\begin{aligned} P^{M/J} &:= \tilde{\Phi}^{M/J}, \\ P_{a_1 \dots a_n}^{M/J} &:= \left[\tilde{D}_{a_1} P_{a_2 \dots a_n}^{M/J} \right]_{\text{STF}} \end{aligned}$$

ohne den zusätzlichen Term mit Ricci-Tensor nicht? Geroch stellte fest, dass die so definierten Tensoren unter einer anderen zulässigen Kompaktifizierung mit konformem Faktor

$$\Omega \rightarrow \omega \cdot \Omega$$

falsch transformieren. Da der Ricci-Tensor von S jedoch auch in Abhängigkeit von ω transformiert, kann dies durch den Zusatzterm kompensiert werden. Dies deutet auch ein Problem bei praktischen Rechnungen in konformen Geometrien an: Im Allgemeinen bleiben Differentialgleichungen unter solchen Abbildungen natürlich nicht invariant und eine entsprechende äquivalente Formulierung in dieser Darstellung muss erst noch gesucht werden.

3.3. Äquivalenz zu anderen Definitionen

Nachdem Geroch [Ger70] 1970 seine Definition für statische asymptotisch flache Raumzeiten gegeben hat und 1974 Hansen [Han73] diese auf Stationarität verallgemeinerte, gab Thorne [Tho80] 1980 seine Definition ebenfalls für den von Hansen beschriebenen Fall, jedoch in speziellen Koordinaten. Drei Jahre später erfolgte eine Variante von Simon und Beig [SB83].

Im selben Jahr konnte jedoch bereits Gürsel [Gür83] zeigen, dass alle Definitionen äquivalent sind. Je nach Aufgabenstellung kann so eine der Definitionen herangezogen werden. Der Zusammenhang zu den Momenten nach Fodor et al. [FHP89] wird in Teil 2 untersucht.

Gürsel stellte fest, dass die Massen- und Strommomente von Simon und Beig mit denen von Geroch und Hansen identisch sind. Der Unterschied zu den Momenten nach Thorne ergibt sich zu

$$\begin{aligned} M_{a_1 \dots a_n}^{\text{Thorne}} &= \frac{1}{(2n-1)!!} M_{a_1 \dots a_n}^{\text{Geroch-Hansen}}, \\ J_{a_1 \dots a_n}^{\text{Thorne}} &= \frac{n+1}{2n(2n-1)!!} J_{a_1 \dots a_n}^{\text{Geroch-Hansen}}. \end{aligned}$$

Die Momente nach Simon und Beig unterscheiden sich durch ihre Definition der Potentiale nicht von denen nach Geroch und Hansen, es handelt sich in gewisser Weise um einen ähnlichen Ansatz. Es lohnt sich jedoch, die Definition nach Thorne einmal explizit aufzuschreiben, da sie dem intuitiven Verständnis der Entwicklung

der Metrik in r^{-1} -Potenzen entspricht. Die Ausführungen sind stark angelehnt an das Kapitel “Multipolmomente” der Dissertation von Joachim Heimberger [Hei92].

In massenzentrierten Koordinaten mit verschwindendem Dipolmoment und in der stationären de Donder-Eichung, die durch

$$(\sqrt{-g}g^{ab})_{,b} = 0 \quad \text{b räumlicher Index}$$

charakterisiert wird, sind die stationären Momente nach Thorne gegeben durch

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -1 + \frac{2M}{r} - \frac{2M^2}{r^2} \\ &\quad + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{2(2l-1)!!}{l!} M_{a_1 \dots a_l}^{\text{Thorne}} \frac{x^{a_1} \dots x^{a_l}}{r^l} + S_{l-1} \right], \\ g_{tj} &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[-\frac{4l(2l-1)!!}{(l+1)!} \epsilon_{jka_l} J_{ka_1 \dots a_{l-1}}^{\text{Thorne}} \frac{x^{a_1} \dots x^{a_l}}{r^l} + S_{l-1} \right], \\ g_{ij} &= \delta_{ij} \left(1 + \frac{2M}{r} \right) + \frac{M^2}{r^2} \left(\delta_{ij} + \frac{x_i x_j}{r^2} \right) \\ &\quad + \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[\frac{2(2l-1)!!}{l!} M_{a_1 \dots a_l}^{\text{Thorne}} \frac{x^{a_1} \dots x^{a_l}}{r^l} \delta_{ij} + S_{l-1} \right], \end{aligned}$$

wobei $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ die Bedeutung des Radius in kartesischen Koordinaten besitzt und die Indizes i und j rein räumliche Indizes sind. S_{l-1} ist ein Symbol für Funktionen beider Winkel, die sich aus den Kugelflächenfunktionen Y_{lm} der Ordnungen kleiner als l zusammensetzen.

Aus den Erfahrungen bei der Berechnung der Multipolmomente muss an der Stelle gewarnt werden vor einem ungenauen Umgang mit den Voraussetzungen an die Koordinaten. Masse und Drehimpuls sind bei der Betrachtung als Koeffizienten in einer $1/r$ -Entwicklung unter vielen Koordinatentransformationen invariant. Dies gilt jedoch nicht für die höheren Momente!

3.4. Einige Aussagen der Momente

Der Artikel von Gürsel [Gür83] gibt neben dem Äquivalenzbeweis der Momente eine Übersicht von einigen Aussagen, die mit Hilfe der verschiedenen Definitionen getroffen werden können. Diese sollen hier mit Verweis auf den Beweis aufgeführt werden.

- (1) Stationäre Raumzeiten sind dann und nur dann statisch, wenn ihre Strommomente verschwinden.

In allen Formulierungen ist es leicht zu zeigen, dass bei Verschwinden der Strommomente die Raumzeit statisch sein muss. Die Umkehrung ist komplizierter, konnte jedoch durch Xanthopoulos [Xan79] gezeigt werden. Im Falle eines sphärisch symmetrischen Problems ist die Lösung durch die Schwarzschild-Raumzeit [Sch16] gegeben und nach dem Birkhoff-Theorem [Bir23] eindeutig.

- (2) Eine statische Raumzeit ist dann und nur dann flach, wenn alle ihre Massenmomente verschwinden.
Xanthopoulos war auch hier der Erste, der dies anhand der Geroch-Hansen-Formulierung zeigen konnte. Mit Hilfe der koordinatenabhängigen Formulierung von Thorne ist die Aussage sogar eine Trivialität.
- (3) Eine stationäre Raumzeit ist dann und nur dann axialsymmetrisch, wenn alle ihre Momente axialsymmetrisch sind.
Diese Aussage folgt sofort aus der Definition der Momente, da die Tensoren P durch die Konstruktion der Potentiale diese Symmetrie besitzen müssen.
- (4) Zwei Raumzeiten haben weit entfernt von der Quelle die selbe Struktur, wenn ihre Multipolmomente konvergieren.
Diese vielleicht wichtigste Aussage im Rahmen der invarianten Beschreibung von stationären Raumzeiten durch Multipolmomente wurde von Simon und Beig [SB83] als auch durch Kundu [Kun81] mit Hilfe der Geroch-Hansen-Momente bewiesen.

Während die ersten drei Aussagen beinahe selbstverständlich erscheinen, bedeutet die letzte tatsächlich die Möglichkeit, stationäre Raumzeiten nach ihren Multipolen zu charakterisieren. Jedoch wird jeder Satz von Momenten wahrscheinlich von verschiedenen Materiekonfigurationen hervorgerufen. Am einfachsten kann dies im Falle der Schwarzschild-Raumzeit nachvollzogen werden, da jeder sphärisch symmetrische Stern diese Außenlösung bedingt, unabhängig von seiner Zustandsgleichung.

3.5. Zu Erhaltungsgrößen

Emmy Noether war es, die 1918 den Zusammenhang zwischen Erhaltungsgrößen und kontinuierlichen Symmetrien herstellen konnte [Noe18]. Ihre Leistungen für die Wissenschaft unter den damaligen Umständen können nicht hoch genug geschätzt werden.

Vom Standardmodell der Elementarteilchen werden Felder beschrieben, deren Wirkung unter den Symmetriegruppen $U(1)$, $SU(2)$ und $SU(3)$ invariant ist. Daraus ergibt sich ein ganzer Satz an erhaltenen Strömen und Ladungen im Noetherschen Sinne.

Die Situation in der Relativitätstheorie ist grundsätzlich anders. Während die Symmetriegruppen der Quantenfeldtheorie vor einem nicht veränderlichen Minkowski-Hintergrund wirken, ist in der Allgemeinen Relativitätstheorie gerade die den Raum beschreibende Metrik das physikalische Feld, welches mit der Materie wechselwirkt. Die entsprechenden Symmetriegruppen sind demzufolge Isometrien, unter deren Wirkung sich die Metrik nicht verändert. Die zugehörigen Vektorfelder sind die Killing-Felder, was ihre Bedeutung in Bezug auf Erhaltungsgrößen in der ART begründet.

Unter der Voraussetzung der Stationarität mit zugehörigem Killing-Feld ξ kann so die Masse M invariant eingeführt werden:

$$M = 2 \int_{\Sigma} (T_{ab} - \frac{1}{2} T_n^n g_{ab}) n^a \xi^b dV.$$

Dabei ist Σ eine raumartige Hyperfläche, n das normierte zu Σ senkrecht stehende, in die Zukunft zeigende Vektorfeld. Das Volumenelement dV bezieht sich auf das von der Raumzeit auf Σ induzierte Volumenelement. Die Herleitung und viele weiterführende Kommentare sind dargestellt z.B. in [Wal84].

Analog gibt es unter der Annahme von Axialsymmetrie eine weitere Erhaltungsgröße: den Drehimpuls J . Dieser kann mit dem zugehörigen Killingfeld η berechnet werden als

$$J = - \int_{\Sigma} T_{ab} n^a \eta^b dV.$$

Jede stationäre, asymptotisch flache Raumzeit kann mit Hilfe der Multipolmomente nach Geroch und Hansen in großer Entfernung von den Quellen charakterisiert werden. Man könnte jetzt meinen, da diese Größen sich nicht ändern, handelt es sich um Erhaltungsgrößen. Dies ist jedoch nicht der Fall, wenn man Erhaltungsgrößen in Verbindung mit kontinuierlichen Symmetrien nach der Idee von Emmy Noether definiert.

Die Äquivalenz von Masse und Drehimpuls mit den gleich bezeichneten Multipolmomenten ist nicht trivial zu zeigen. Eine Herleitung haben Hartle und Sharp jedoch bereits 1967 in [HS67] gegeben, wenn man die Koordinatendarstellung der Momente nach Thorne heranzieht.

Teil 2

Die Berechnung nach Fodor et al.

Bei der tatsächlichen Berechnung der Multipolmomente nach Geroch und Hansen ergeben sich viele technische Schwierigkeiten. So ist etwa die Bestimmung eines konformen Faktors, der Definition 2.2.1 erfüllt, in allgemeinen stationären Raumzeiten oft nicht leicht zu realisieren. Auch eine computergestützte Implementierung der Rekursion stellt sich als kompliziert und rechenintensiv heraus. Deshalb lohnt es sich, die Situation in Raumzeiten mit weiteren Symmetrien genauer zu untersuchen. Dies wurde im Falle der Axialsymmetrie durch Fodor et al. [FHP89] getan.

Dort lässt sich mit Hilfe des Ernst-Formalismus ein Algorithmus herleiten, der die Anzahl der zu berechnenden Tensoren wesentlich verringert. Dieser Teil der Arbeit wird die Rechnungen von Fodor ausführlich darstellen und an einigen Stellen mit strengen Aussagen unterlegen. Die Resultate von Fodor konnten anhand einer eigenen Programmierung des Verfahrens bestätigt sowie das elfte Moment bestimmt werden.

Das erste Kapitel dieses Teils wird die Vorbereitungen zur eigentlichen Herleitung des Algorithmus darstellen. Zuerst wird die Kompaktifizierung des Raums in angepassten Koordinaten besprochen. Danach erfolgt eine kurze Vorstellung der Ernst-Gleichung. Im Anschluss wird das Potential ϕ eingeführt, mit dessen Hilfe die Definition der Momente nach Fodor erfolgt. Außerdem wird auf die Äquivalenz zu den Momenten nach Geroch und Hansen eingegangen. Die besondere Form von regulären Tensoren auf der Achse im Falle der Axialsymmetrie wird danach auf die Momente angewendet. Das Kapitel endet mit einer Herleitung der benötigten konformen Ernst-Gleichung.

Das zweite Kapitel behandelt die Herleitung aller für eine Implementierung nötigen Schritte und stellt die gefundenen Ergebnisse dar. Zuerst wird mit Hilfe eines Potenzreihenansatzes das konforme Potential $\tilde{\phi}$ durch die Entwicklungskoeffizienten auf der Achse ausgedrückt. Bei der anschließenden Herleitung des Algorithmus spielt die Axialsymmetrie die entscheidende Rolle bei der Reduktion der zu berechnenden Tensoren.

Vorüberlegungen

4.1. Kompaktifizierung Axialsymmetrischer Raumzeiten

Eine stationäre axialsymmetrische Raumzeit kann immer in Weyl-Lewis-Papapetrou-Koordinaten durch die Metrik

$$(4.1.1) \quad g = e^{-2U} [e^{2k} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\varphi^2] - e^{2U} (dt + a \cdot d\varphi)^2$$

charakterisierter werden, wobei die Funktionen U , a , k und W nur von den Koordinaten ρ und ζ abhängen, siehe etwa [MAK⁺08]. Das Grenzverhalten der Funktionen in der Umgebung von Λ ist für die Kompaktifizierbarkeit von besonderem Interesse. Für $\rho^2 + \zeta^2 \rightarrow \infty$ soll unter der Voraussetzung einer kompakten Materieverteilung

$$\begin{aligned} e^{2U} &\rightarrow 1, \\ a &\rightarrow 0, \\ k &\rightarrow 0, \\ W &\rightarrow \rho \end{aligned}$$

gelten. Eine solche Raumzeit ist nach der Definition 2.2.1 asymptotisch flach:

Die Metrik $h_{ab} = e^{2U} g_{ab} + \xi_a \xi_b$ ist auf M gegeben als

$$h = e^{2k} (d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\varphi^2.$$

Bei der getroffenen Wahl von $\xi = \partial_t$ hat h erwartungsgemäß keine Terme mehr in dt . Es werden die neuen Koordinaten

$$(4.1.2) \quad \begin{aligned} \tilde{\rho} &= \frac{\rho}{\rho^2 + \zeta^2}, \\ \tilde{\zeta} &= \frac{\zeta}{\rho^2 + \zeta^2}, \\ \tilde{\varphi} &= \varphi \end{aligned}$$

eingeführt, welche als Spiegelung am Einheitskreis interpretiert werden können. Dabei ist $\tilde{r}^2 = \tilde{\rho}^2 + \tilde{\zeta}^2 = r^{-2}$. Damit ist die Metrik gegeben durch

$$h = \tilde{r}^{-4} e^{2k} (d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2) + W^2 d\tilde{\varphi}^2.$$

Für große ρ , also in einer Umgebung von Λ , ist $W \approx \rho$. Damit erhält man

$$h \approx \tilde{r}^{-4} [e^{2k} (d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2) + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\varphi}^2],$$

was bei der Wahl $W = \rho$ exakt ist. Diese Herangehensweise ist nicht unpraktisch, denn jetzt kann ein geeigneter konformer Faktor sofort als

$$\Omega = \tilde{r}^2$$

gewählt werden und die Metrik $\tilde{h} = \Omega^2 h$ ist gegeben durch

$$(4.1.3) \quad \tilde{h} = e^{2k} (d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2) + \tilde{r}^4 W^2 d\tilde{\varphi}^2$$

$$(4.1.4) \quad \xrightarrow{\tilde{r} \rightarrow 0} d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2 + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\varphi}^2.$$

Die konforme Metrik \tilde{h} entspricht demzufolge in Λ der konformen Metrik der Minkowski-Raumzeit und es ist schnell zu überprüfen, dass der konforme Faktor Ω alle Bedingungen nach Definition 2.2.1 erfüllt. Damit sind solche axialsymmetrisch stationären Raumzeiten tatsächlich konform flach.

4.2. Die Ernst-Gleichung

Ausgehend von einem Variationsprinzip leitete Ernst 1968 in [Ern68] eine spezielle Form der Vakuumfeldgleichungen axialsymmetrisch stationärer Raumzeiten her. Es existieren auch andere Darstellungen, jedoch kann dieser Zugang als sehr erfolgreich bezeichnet werden. Ernst selbst merkte in seiner Arbeit an:

“The reformulation of the axially symmetric gravitational field problem in terms of the \mathcal{E} equation facilitates an intensive investigation of solutions corresponding to uniformly rotating sources.”

Er sollte Recht behalten. Das Feld der starr rotierenden Staubscheibe nach Neugebauer und Meinel [NM93, NM95] konnte mit Hilfe dieser Formulierung bestimmt werden.

Eine ausführliche Herleitung der Ernst-Gleichung kann z.B. in [MAK⁺08] nachgeschlagen werden. Hier wird das Ergebnis kurz vorgestellt.

Im Vakuum gilt für das Potential W die Gleichung

$$W_{,\rho\rho} + W_{,\zeta\zeta} = 0,$$

weshalb die Wahl $W = \rho$ immer realisiert werden kann. In diesem Fall sind die Feldgleichungen äquivalent zu der Ernst-Gleichung

$$(4.2.1) \quad \Re(f) \Delta f = (\nabla f)^2$$

mit dem komplexen Ernst-Potential

$$(4.2.2) \quad f(\rho, \zeta) = e^{2U} + ib.$$

Der Laplace-Operator bezieht sich dabei auf den dreidimensionalen flachen Raum. In Zylindergeometrie ist

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

mit der in Axialsymmetrie immer verschwindenden φ -Ableitung. Analoges gilt für ∇ . Das Potential b kann berechnet werden mit Hilfe von

$$\begin{aligned} a_{,\rho} &= \rho e^{-4U} b_{,\zeta}, \\ a_{,\zeta} &= -\rho e^{-4U} b_{,\rho} \end{aligned}$$

und der Forderung, dass f im Unendlichen gegen 1 geht.

4.3. Das Potential ϕ

Fodor, Hoenselaers und Perjés benutzten nicht die in Definition 3.1.1 gegebenen Potentiale, sondern wählten einen Potentialansatz ausgehend von der Ernst-Gleichung. Sie verwendeten das ebenfalls von Ernst in Gleichung 10 seiner hier zitierten Arbeit definierte Potential

$$(4.3.1) \quad \phi(\rho, \zeta) := \frac{1 - f(\rho, \zeta)}{1 + f(\rho, \zeta)}.$$

Ziel ist es jetzt, die Ernst-Gleichung in ϕ auszudrücken. Es gilt

$$\begin{aligned} f &= \frac{(1 - \phi)(1 + \bar{\phi})}{(1 + \phi)(1 + \bar{\phi})} \\ &= \frac{1 - 2i \cdot \Im(\phi) - \phi \bar{\phi}}{1 + 2 \cdot \Re(\phi) + \phi \bar{\phi}} \end{aligned}$$

und damit in den einzelnen Termen

$$\begin{aligned} \Re(f) &= \frac{1 - \phi \bar{\phi}}{(1 + \phi)(1 + \bar{\phi})}, \\ \Delta f &= -\frac{2}{(1 + \phi)^3} \left[(1 + \phi) \Delta \phi - 2 (\nabla \phi)^2 \right], \\ (\nabla f)^2 &= \frac{4 (\nabla \phi)^2}{(1 + \phi)^4}, \end{aligned}$$

womit sich die Ernst-Gleichung schreiben läßt als

$$\frac{\phi \bar{\phi} - 1}{1 + \bar{\phi}} \left[(1 + \phi) \Delta \phi - 2 (\nabla \phi)^2 \right] = 2 (\nabla \phi)^2.$$

Bei Beachtung von

$$\frac{\phi \bar{\phi} - 1}{1 + \bar{\phi}} + 1 = \bar{\phi} \cdot \frac{1 + \phi}{1 + \bar{\phi}},$$

Trennen und Kürzen von Termen folgt dann die Ernst-Gleichung in ϕ :

$$(4.3.2) \quad \Delta \phi = \frac{2 \bar{\phi}}{\phi \bar{\phi} - 1} (\nabla \phi)^2.$$

Auch diese Form wurde bereits durch Ernst angegeben.

4.4. Fodor'sche Momente

Mit Hilfe von ϕ werden neue Massen- und Strompotentiale und damit neue Momente eingeführt. In diesem Abschnitt wird neben ihrer Definition dargestellt, dass die Momente zu denen nach Geroch und Hansen äquivalent sind.

DEFINITION 4.4.1. Die Potentiale nach Fodor [FHP89] sind definiert als Real- und Imaginärteil des Potentials ϕ , kurz

$$\phi =: \Phi^{\text{M,Fod}} + i\Phi^{\text{J,Fod}}.$$

Analog zur Definition 3.2.1 nach Geroch und Hansen werden die zugehörigen Multipolensoren nach Fodor definiert durch

$$\begin{aligned} P^{\text{Fod}} &:= \tilde{\phi} \equiv \frac{\phi}{\sqrt{\Omega}}, \\ P_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} &:= \left[\tilde{D}_{a_1} P_{a_2 \dots a_n}^{\text{Fod}} - \frac{(n-1)(2n-3)}{2} \tilde{R}_{a_1 a_2} P_{a_3 \dots a_n}^{\text{Fod}} \right]_{\text{STF}}. \end{aligned}$$

Demzufolge sind die Multipolmomente gegeben durch

$$\begin{aligned} Q_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} &= P_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} \Big|_{\Lambda}, \\ M_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} = \Re Q_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} &\quad \text{und} \quad J_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} = \Im Q_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}}. \end{aligned}$$

Wie hängen die so neu definierten Potentiale und Momente mit den ursprünglichen nach Geroch und Hansen zusammen? Nach Trennung in Real- und Imaginärteil des Potentials ϕ und bei Beachtung von $f = e^{2U} + ib$ wird klar, dass

$$\Phi^{\text{M/J}} = \frac{\Phi^{\text{M/J,Fod}}}{(\Phi^{\text{M,Fod}})^2 + (\Phi^{\text{J,Fod}})^2 - 1}$$

gilt. Nach Theorem 4 in [SB83] haben zwei Sätze von Potentialen, $\Phi^{\text{M/J}}$ und $\Xi^{\text{M/J}}$ die selben Momente, wenn $\Phi^{\text{M/J}} = \Phi^{\text{M/J}}(\Xi^{\text{M}}, \Xi^{\text{J}})$ und es gilt mit A oder $B = M$ oder J :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^A}{\partial \Xi^B} \Big|_{\Xi^{\text{M}} = \Xi^{\text{J}} = 0} &= \delta_B^A, \\ \Phi^{A/B}(\Xi^{\text{M}}, \Xi^{\text{J}}) &= -\Phi^{A/B}(-\Xi^{\text{M}}, -\Xi^{\text{J}}). \end{aligned}$$

Bezogen auf den Wechsel der Geroch-Hansen-Potentiale Φ^A zu denen nach Fodor, $\Phi^{A,\text{Fod}}$, ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi^A}{\partial \Phi^{B,\text{Fod}}} \Big|_{\Phi^{\text{M,Fod}} = \Phi^{\text{J,Fod}} = 0} &= -\delta_B^A \quad \text{und} \\ \Phi^{\text{M/J}}(\Phi^{\text{M,Fod}}, \Phi^{\text{J,Fod}}) &= -\Phi^{\text{M/J}}(-\Phi^{\text{M,Fod}}, -\Phi^{\text{J,Fod}}). \end{aligned}$$

Damit sind beide Definitionen äquivalent, bei den Massenmomenten gibt es allerdings einen Vorzeichenwechsel, während die Strommomente unverändert bleiben¹:

$$(4.4.1) \quad M_{a_1 \dots a_n}^{\text{Geroch-Hansen}} = -M_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}},$$

$$(4.4.2) \quad J_{a_1 \dots a_n}^{\text{Geroch-Hansen}} = J_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}}.$$

¹Die Aussage erfolgt hier ohne Beweis. Als Beispiel kann die Kerr-Metrik in Abschnitt 6.1 herangezogen werden.

Das bedeutet: die in Definition 3.2.1 eingeführten Multipolmomente können mit Hilfe des Potentials ϕ berechnet werden. Darüber hinaus können so alle Erfahrungen im Ernst-Formalismus auf die Berechnung der Multipolmomente übertragen werden.

4.5. Ausnutzung der Axialsymmetrie

In der Newtonschen Theorie sind die Momente in Axialsymmetrie durch die

$$M_n = \frac{1}{n!} M_{\underbrace{\zeta \dots \zeta}_n}$$

gegeben, wenn ζ die Symmetrieachse darstellt, siehe Gleichung 1.1.3 auf Seite 10. Die Konstruktion ist im Relativistischen identisch, jedoch die Argumentation nach Hansen [Han73] eine andere:

Im konformen Raum sollen die Tensoren $P_{a\dots b}^{M/J, \text{Fod}}$ auf der Symmetrieachse $\tilde{\zeta}$ regulär sein. Da kein Winkel ausgezeichnet ist, müssen in $\tilde{\rho} = 0$ alle anderen Anteile als die Projektion auf die Symmetrieachse verschwinden. Das heißt für die Tensorfelder $P_{a\dots b}^{M/J}$ aus Definition 3.2.1 mit Symmetrieachse $\tilde{\zeta}$:

$$P_{i\dots j}^{M/J} dx^i \otimes \dots \otimes dx^j \Big|_{\Lambda} = P_{\tilde{\zeta} \dots \tilde{\zeta}}^{M/J} d\tilde{\zeta} \otimes \dots \otimes d\tilde{\zeta} \Big|_{\Lambda} + 0.$$

Deshalb sind die Momente n -ter Stufe bestimmt durch die $P_{\tilde{\zeta} \dots \tilde{\zeta}}^{M/J}$ n -ter Stufe in Λ . Die folgende Definition ist angelehnt an die durch Hansen in [Han73] gegebene.

DEFINITION 4.5.1. Seien die Multipolmomente wie in 3.2.1 definiert. Der konforme Faktor Ω sei so gewählt, dass der projizierte Teil des axialen Killingfeldes η auch ein Killingfeld bezüglich \tilde{h} ist, also $L_{\tilde{\eta}} \tilde{h} = 0$. Weiterhin soll $\tilde{\eta}$ so gewählt sein, dass das Vektorfeld der Symmetrieachse, $\tilde{\zeta}^a := \frac{1}{2} \tilde{\epsilon}^{abc} \tilde{D}_b \eta_c$ in Λ ein Einheitsvektor ist. Dann werden die Multipolmomente komplett beschrieben durch die Wirkung auf die Symmetrieachse und die skalaren Massen- und Strommomente n -ter Stufe nach [FHP89] sind gegeben durch

$$(4.5.1) \quad M_n^{\text{Fod}} := \frac{1}{n!} \Re P_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} \tilde{\zeta}^{a_1} \dots \tilde{\zeta}^{a_n} \Big|_{\Lambda},$$

$$(4.5.2) \quad J_n^{\text{Fod}} := \frac{1}{n!} \Im P_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} \tilde{\zeta}^{a_1} \dots \tilde{\zeta}^{a_n} \Big|_{\Lambda}.$$

Es sei weiterhin

$$(4.5.3) \quad Q_n^{\text{Fod}} := M_n^{\text{Fod}} + i J_n^{\text{Fod}}.$$

Da im axialsymmetrisch stationären Fall die Metrik nach Gleichung 4.1.1 verwendet wird, kann die Symmetrieachse als ζ -Achse identifiziert werden.

4.6. Die konforme Ernst-Gleichung

Um einen Ansatz zur Berechnung der Momente mit Hilfe des Ernst-Formalismus entwickeln zu können, ist es notwendig, die Ernst-Gleichung in $\tilde{\phi}$ auf dem kompaktifizierten Raum zu kennen.

LEMMA 4.6.1. *Nach der konformen Kompaktifizierung des asymptotisch flachen Riemann'schen Raumes (S, h) nach Abschnitt 4.1 und der Wahl $W = \rho$ sind die Ernst-Gleichung in ϕ bezüglich (S, h)*

$$(4.6.1) \quad (\phi\bar{\phi} - 1) \Delta\phi = 2\bar{\phi} (\nabla\phi)^2$$

und die konforme Ernst-Gleichung in $\tilde{\phi}$ auf (\tilde{S}, \tilde{h})

$$(4.6.2) \quad (\tilde{r}^2 \tilde{\phi}\bar{\tilde{\phi}} - 1) \tilde{\Delta}\tilde{\phi} = 2\bar{\tilde{\phi}} (\tilde{\nabla}\tilde{r}\tilde{\phi})^2$$

äquivalent.

BEWEIS. Die zur flachen Metrik h konforme Metrik \tilde{h} ist gegeben durch

$$(4.6.3) \quad \tilde{h} = d\tilde{\rho}^2 + d\tilde{\zeta}^2 + \tilde{\rho}^2 d\tilde{\phi}^2.$$

Es soll nun die Koordinatendarstellung von h in den ‘‘Schlangenkoordinaten’’ verwendet werden, um Gleichung 4.6.1 in diesen Koordinaten auszudrücken. Bei Beachtung von $\partial_{\bar{\phi}}\phi = 0$ ist

$$\begin{aligned} \Delta_h\phi &= \frac{1}{\sqrt{\det(h)}} \partial_i \left(\sqrt{\det(h)} h^{ij} \partial_j \phi \right) \\ &= \frac{\tilde{r}^6}{\tilde{\rho}} \left(\partial_{\tilde{\rho}} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{\rho}} \phi + \partial_{\tilde{\zeta}} \frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{\zeta}} \phi + 0 \right) \\ &= \frac{\tilde{r}^6}{\tilde{\rho}} \left(\frac{\tilde{\rho}}{\tilde{r}^2} \left(\partial_{\tilde{\rho}\tilde{\rho}} + \partial_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} \right) \phi + \frac{1}{\tilde{r}^2} \partial_{\tilde{\rho}} \phi - \frac{2}{\tilde{r}^4} \left(\tilde{\rho}^2 \partial_{\tilde{\rho}} + \tilde{\zeta} \tilde{\rho} \partial_{\tilde{\zeta}} \right) \phi \right) \\ &= \tilde{r}^4 \left(\partial_{\tilde{\rho}\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \partial_{\tilde{\rho}} + \partial_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} \right) \phi - 2\tilde{r}^2 \left(\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} + \tilde{\zeta} \partial_{\tilde{\zeta}} \right) \phi. \end{aligned}$$

Weiterhin ist aus Gleichung 4.6.2:

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{h}}\tilde{\phi} &= \frac{1}{\sqrt{\det(\tilde{h})}} \partial_i \left(\sqrt{\det(\tilde{h})} \tilde{h}^{ij} \partial_j \tilde{\phi} \right) \\ &= \left(\partial_{\tilde{\rho}\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \partial_{\tilde{\rho}} + \partial_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} \right) \frac{\tilde{\phi}}{\tilde{r}} \\ &= \frac{1}{\tilde{r}} \left(\partial_{\tilde{\rho}\tilde{\rho}} + \frac{1}{\tilde{\rho}} \partial_{\tilde{\rho}} + \partial_{\tilde{\zeta}\tilde{\zeta}} \right) \phi - \frac{2}{\tilde{r}^3} \left(\tilde{\rho} \partial_{\tilde{\rho}} + \tilde{\zeta} \partial_{\tilde{\zeta}} \right) \phi. \end{aligned}$$

Damit ist

$$(4.6.4) \quad \Delta_h\phi = \tilde{r}^5 \Delta_{\tilde{h}}\tilde{\phi},$$

was die Äquivalenz der linken Seiten zeigt. Es ist

$$\begin{aligned} (\nabla_h\phi)^2 &= h_{ij}(\tilde{x}) (\nabla_h\phi)^i (\nabla_h\phi)^j \\ &= h_{ij} h^{il} (\partial_l\phi) h^{jk} (\partial_k\phi) \\ &= h^{lk} (\partial_l\phi) (\partial_k\phi) \\ &= \tilde{r}^4 \left[(\partial_{\tilde{\rho}}\phi)^2 + (\partial_{\tilde{\zeta}}\phi)^2 + 0 \right] \quad \text{sowie} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla_{\tilde{h}} \tilde{r} \tilde{\phi}\right)^2 &= \left(\nabla_{\tilde{h}} \phi\right)^2 \\ &= \left(\partial_{\tilde{\rho}} \phi\right)^2 + \left(\partial_{\tilde{\zeta}} \phi\right)^2. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$(4.6.5) \quad \left(\nabla_h \phi\right)^2 = \tilde{r}^4 \left(\nabla_{\tilde{h}} \tilde{r} \tilde{\phi}\right)^2.$$

Da $\tilde{\phi} = \phi/\tilde{r}$, sind beide rechten Seiten der Gleichungen 4.6.4 und 4.6.5 um einen Faktor \tilde{r}^5 verschieden:

$$\bar{\phi} \left(\nabla_h \phi\right)^2 = \tilde{r}^5 \bar{\phi} \left(\nabla_{\tilde{h}} \tilde{r} \tilde{\phi}\right)^2$$

und die Äquivalenz ist gezeigt. \square

Damit ist es gelungen, den Ernst-Formalismus auf den kompaktifizierten Raum zu übertragen. Es kann nun nach einem möglichst ressourcensparenden Algorithmus gesucht werden, der es gestattet, die Momente iterativ zu berechnen.

Algorithmus und Ergebnisse

5.1. Der Potenzreihenansatz

Es ist bekannt, dass die Vorgabe des Ernst-Potentials auf der Achse ausreicht, um das Gravitationsfeld im gesamten Raum vollständig zu beschreiben. Ein ähnliches Verhalten ist auch im kompaktifizierten Raum zu erwarten. Ziel ist es, in einem Potenzreihenansatz durch Koeffizientenvergleich alle Koeffizienten in Abhängigkeit von denen auf der Achse auszudrücken. Letzten Endes können so alle Multipolmomente in Abhängigkeit von den Entwicklungskoeffizienten des Ernst-Potentials auf der Achse ausgedrückt werden.

Die Differentialoperatoren beziehen sich in diesem Abschnitt auf die Metrik \tilde{h} aus Gleichung 4.6.3. Die Ernst-Gleichung in $\tilde{\phi}(\tilde{\rho}, \tilde{z}) = \phi/\tilde{r}$ ist bei Beachtung von $(\nabla\tilde{r})^2 = 1$

$$\begin{aligned} (\tilde{r}^2\tilde{\phi}\tilde{\phi} - 1) \Delta\tilde{\phi} &= 2\tilde{\phi}(\nabla\tilde{r}\tilde{\phi})^2 \\ &= 2\tilde{\phi}\left(\tilde{r}^2(\nabla\tilde{\phi})^2 + 2\tilde{r}\tilde{\phi}(\nabla\tilde{\phi})(\nabla\tilde{r}) + \tilde{\phi}^2\right). \end{aligned}$$

Um die folgenden Rechnungen etwas nachvollziehbarer zu gestalten, wird die Gleichung in zwei Teile aufgespalten:

$$\begin{aligned} LHS &:= (\tilde{r}^2\tilde{\phi}\tilde{\phi} - 1) \Delta\tilde{\phi} \\ &= (\tilde{r}^2\tilde{\phi}\tilde{\phi} - 1) \left[\partial_{\tilde{\rho}\tilde{\rho}}\tilde{\phi} + \frac{1}{\tilde{\rho}}\partial_{\tilde{\rho}}\tilde{\phi} + \partial_{\tilde{z}\tilde{z}}\tilde{\phi} \right], \\ RHS &:= 2\tilde{\phi}\left(\tilde{r}^2\left[(\partial_{\tilde{\rho}}\tilde{\phi})^2 + (\partial_{\tilde{z}}\tilde{\phi})^2\right] + 2\tilde{\phi}(\tilde{\rho}\partial_{\tilde{\rho}}\tilde{\phi} + \tilde{z}\partial_{\tilde{z}}\tilde{\phi}) + \tilde{\phi}^2\right). \end{aligned}$$

Es wird in der Nähe von Λ ein Potenzreihenansatz der Form

$$(5.1.1) \quad \tilde{\phi} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}\tilde{\rho}^i\tilde{z}^j$$

gewählt. Der Übersichtlichkeit halber werden die Schlangen über den Koordinaten weggelassen. Alle Summen laufen, so lange dies nicht anders ausgedrückt wird, von

0 bis ∞ . Dann ist

$$\begin{aligned}
LHS &= \left[(\rho^2 + \zeta^2) \sum_{a,b,c,d} a_{ab} \bar{a}_{cd} \rho^{a+c} \zeta^{b+d} - 1 \right] \times \\
&\quad \left[\sum_{e,f} a_{ef} (e(e-1)\rho^{e-2}\zeta^f + e\rho^{e-2}\zeta^f + f(f-1)\rho^e\zeta^{f-2}) \right] \\
&= \left[(\rho^2 + \zeta^2) \sum_{a,b,c,d} a_{ab} \bar{a}_{cd} \rho^{a+c} \zeta^{b+d} - 1 \right] \times \\
&\quad \left[\sum_{e,f} a_{ef} \rho^e \zeta^f \left(\frac{e^2}{\rho^2} + \frac{f(f-1)}{\zeta^2} \right) \right] \\
&= \left[\sum_{a,b,c,d,e,f} a_{ab} \bar{a}_{cd} a_{ef} \rho^{a+c+e} \zeta^{b+d+f} \left(e^2 + f(f-1) + e^2 \frac{\zeta^2}{\rho^2} + f(f-1) \frac{\rho^2}{\zeta^2} \right) \right] \\
&\quad - \sum_{e,f} a_{ef} \rho^e \zeta^f \left(\frac{e^2}{\rho^2} + \frac{f(f-1)}{\zeta^2} \right).
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich für $\rho^k \zeta^l$ ergibt auf der linken Seite:

$$\begin{aligned}
LHS, \rho^k \zeta^l &\rightarrow \sum_{a,b,c,d,e,f} a_{ab} \bar{a}_{cd} a_{ef} (e^2 + f(f-1)) \rho^{a+c+e} \zeta^{b+d+f} \delta_{a+c+e,k} \delta_{b+d+f,l} \\
&\quad + \sum_{a,b,c,d,e,f} a_{ab} \bar{a}_{cd} a_{ef} e^2 \rho^{a+c+e-2} \zeta^{b+d+f+2} \delta_{a+c+e-2,k} \delta_{b+d+f+2,l} \\
&\quad + \sum_{a,b,c,d,e,f} a_{ab} \bar{a}_{cd} a_{ef} f(f-1) \rho^{a+c+e+2} \zeta^{b+d+f-2} \delta_{a+c+e+2,k} \delta_{b+d+f-2,l} \\
&\quad - \sum_{e,f} a_{ef} e^2 \rho^{e-2} \zeta^f \delta_{e-2,k} \delta_{f,l} - \sum_{e,f} a_{ef} f(f-1) \rho^e \zeta^{f-2} \delta_{e,k} \delta_{f-2,l}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die linke Seite der $\rho^k \zeta^l$ -Vorfaktor

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{a+c+e=k \\ b+d+f=l}} a_{ab} \bar{a}_{cd} [a_{ef} (e^2 + f(f-1)) + a_{e+2}{}_{f-2} (e+2)^2 \\
&+ a_{e-2}{}_{f+2} (f+2)(f+1)] - a_{k+2}{}_{l} (k+2)^2 - a_{k}{}_{l+2} (l+2)(l+1).
\end{aligned}$$

Jetzt die rechte Seite:

$$\begin{aligned}
RHS &= 2 \sum_{a,b} \bar{a}_{ab} \rho^a \zeta^b \left\{ (\rho^2 + \zeta^2) \left[\sum_{c,d,e,f} a_{cd} a_{ef} c e \rho^{c+e-2} \zeta^{d+f} + \sum_{c,d,e,f} a_{cd} a_{ef} d f \rho^{c+e} \zeta^{d+f-2} \right] \right. \\
&\quad \left. + 2 \sum_{c,d} a_{cd} \rho^c \zeta^d \left(\sum_{e,f} a_{ef} e \rho^e \zeta^f + \sum_{c,d,e,f} a_{ef} f \rho^e \zeta^f \right) + \sum_{c,d,e,f} a_{cd} a_{ef} \rho^{c+e} \zeta^{d+f} \right\} \\
&= 2 \sum_{a,b} \bar{a}_{ab} \rho^a \zeta^b \left\{ \sum_{c,d,e,f} a_{cd} a_{ef} [c e \rho^{c+e} \zeta^{d+f} + c e \rho^{c+e-2} \zeta^{d+f+2} + d f \rho^{c+e+2} \zeta^{d+f-2} \right. \\
&\quad \left. + d f \rho^{c+e} \zeta^{d+f}] + 2 \sum_{c,d,e,f} a_{cd} a_{ef} \rho^{c+e} \zeta^{d+f} \left(e + f + \frac{1}{2} \right) \right\} \\
&= 2 \sum_{a,b,c,d,e,f} \bar{a}_{ab} a_{cd} a_{ef} \rho^{a+c+e} \zeta^{b+d+f} \left\{ 1 + c e + d f + 2(e + f) + c e \frac{\zeta^2}{\rho^2} + d f \frac{\rho^2}{\zeta^2} \right\} \\
&= 2 \sum_{a,b,c,d,e,f} a_{ab} \bar{a}_{cd} a_{ef} \rho^{a+c+e} \zeta^{b+d+f} \left\{ 1 + a e + b f + 2(e + f) + a e \frac{\zeta^2}{\rho^2} + b f \frac{\rho^2}{\zeta^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Dies ergibt für die rechte Seite den $\rho^k \zeta^l$ -Vorfaktor

$$\begin{aligned}
&2 \sum_{\substack{a+c+e=k \\ b+d+f=l}} a_{ab} \bar{a}_{cd} [a_{ef} (1 + a e + b f + 2(e + f)) \\
&\quad + a_{e+2} f_{-2} a(e + 2) + a_{e-2} f_{+2} b(f + 2)].
\end{aligned}$$

Die beiden Vorfaktoren müssen identisch sein. Daher ist

$$\begin{aligned}
(5.1.2) \quad a_{k+2} l (k+2)^2 &= -(l+2)(l+1) a_{k \ l+2} + \sum_{\substack{a+c+e=k \\ b+d+f=l}} a_{ab} \bar{a}_{cd} \times \\
&[a_{ef} (e^2 + f^2 - 2 - 2ae - 2bf - 4e - 5f) \\
&\quad + a_{e+2} f_{-2} (e+2)(e+2-2a) + a_{e-2} f_{+2} (f+2)(f+1-2b)].
\end{aligned}$$

Dies entspricht Gleichung (12) aus [FHP89].

Die wichtigste Aussage dieser Gleichung ist, dass die Vorgabe der

$$m_n := a_{0n}$$

reicht, um alle weiteren a_{ij} zu bestimmen: $a_{ij} = a_{ij}(m_k, k \leq i+j)$. Ausserdem gilt $a_{ij} = 0$ für ungerade i , was ebenso zu erwarten war, da $\tilde{\phi}$ eine gerade Funktion in $\tilde{\rho}$ sein muss.

Auf der Achse ist $\tilde{r}|_{\tilde{\rho}=0} = \tilde{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$ und folglich gilt mit $\phi = \tilde{r} \tilde{\phi}$ nach Gleichung 5.1.1

$$(5.1.3) \quad \phi(\rho = 0, \zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^{n+1}}.$$

Dies ist eine für praktische Rechnungen sehr nützliche Aussage, denn für die Bestimmung der m_n muss die Raumzeit nicht kompaktifiziert werden, es reicht eine Entwicklung des Potentials ϕ auf der Achse.

5.2. Herleitung des Algorithmus

Da alle physikalischen Informationen des Vakuumteils der Raumzeit in $\tilde{\phi}$ enthalten sind, ist es nicht verwunderlich, dass alle für die Berechnung der Momente relevanten Größen wie der Krümmungstensor und die Zusammenhangskomponenten mit Hilfe von $\tilde{\phi}$ und seinen Ableitungen ausgedrückt werden können. Alle Formeln dieses Abschnitts beziehen sich ausschließlich auf Größen in der kompaktifizierten Raumzeit, weshalb die Tilden zu Gunsten der Lesbarkeit in diesem Abschnitt weggelassen werden.

Nach Fodor gilt für die zu bestimmenden Größen

$$(5.2.1) \quad \begin{aligned} R_{ij} &= \frac{1}{\mathcal{D}^2} (G_i \bar{G}_j + \bar{G}_i G_j), \\ k_{,\rho} &= \frac{\rho}{2} (R_{\rho\rho} - R_{zz}), \\ k_{,z} &= \rho \cdot R_{\rho z} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} G_\rho &= \zeta \phi_{,\rho} - \rho \phi_{,\zeta}, \\ G_\zeta &= \rho \phi_{,\rho} + \zeta \phi_{,\zeta} + \phi, \\ G_\varphi &= 0, \\ \mathcal{D} &= r^2 \phi \bar{\phi} - 1. \end{aligned}$$

Damit sind im Prinzip nach den Aussagen des vorherigen Abschnitts alle Größen mit Hilfe der m_n ausgedrückt.

Ein nächster Schritt ist das Aufstellen von geeigneten Iterationen für die Berechnung der Multipoltensoren $P_{i_1 \dots i_n}^{\text{Fod}}$. Durch Ausnutzen der symmetrischen Natur dieser kann die Berechnung im Folgenden vereinfacht werden.

Ausgangspunkt ist wieder Definition 4.4.1

$$(5.2.2) \quad \begin{aligned} P^{\text{Fod}} &= \phi, \\ P_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} &= \left[D_{a_1} P_{a_2 \dots a_n}^{\text{Fod}} - \frac{(n-1)(2n-3)}{2} R_{a_1 a_2} P_{a_3 \dots a_n}^{\text{Fod}} \right]_{\text{STF}}. \end{aligned}$$

Ziel ist es, die Definition in eine möglichst einfache Koordinatenform bei Beachtung der Gestalt der Christoffelsymbole und des Riccitorsors zu bringen. Die zu betrachtende konforme Metrik ist nach den Ausführungen in Abschnitt 4.1 mit $W = \rho$ gegeben als

$$h = e^{2k} d\rho^2 + e^{2k} d\zeta^2 + \rho^2 d\varphi^2$$

und die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sind demzufolge

$$\begin{aligned}\Gamma_{\rho\rho}^{\rho} &= \Gamma_{\rho\zeta}^{\zeta} = -\Gamma_{\zeta\zeta}^{\rho} = \partial_{\rho}k, \\ \Gamma_{\zeta\zeta}^{\zeta} &= \Gamma_{\zeta\rho}^{\rho} = -\Gamma_{\rho\rho}^{\zeta} = \partial_{\zeta}k, \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^{\rho} &= -\rho e^{-2k}, \\ \Gamma_{\rho\varphi}^{\varphi} &= \frac{1}{\rho}.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich der Riccitenor

$$\begin{aligned}R &= -\left[\partial_{\zeta\zeta}k + \partial_{\rho\rho}k - \frac{1}{\rho}\partial_{\rho}k\right]d\rho \otimes d\rho \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\partial_{\zeta}k(d\rho \otimes d\zeta + d\zeta \otimes d\rho) \\ &\quad - \left[\partial_{\zeta\zeta}k + \partial_{\rho\rho}k + \frac{1}{\rho}\partial_{\rho}k\right]d\zeta \otimes d\zeta.\end{aligned}$$

Da die Indizes nur ρ , ζ und φ sein können und die betrachteten Tensoren symmetrisch sein sollen, lohnt es sich, mit

$$(5.2.3) \quad P_{a \ b \ c} := P_{\underbrace{\rho \dots \rho}_a \ \underbrace{\zeta \dots \zeta}_b \ \underbrace{\varphi \dots \varphi}_c}$$

eine Konvention zur Schreibweise einzuführen. In Gleichung 5.2.2 soll der symmetrische Anteil ausgerechnet werden. Es wird zunächst der ‘‘Ableitungs-Teil’’ der $P_{a \ b \ c}$ betrachtet. Diese Zerlegung kann durchgeführt werden, da die Symmetrisierung und Extraktion des spurfreien Teils lineare Operationen sind. So ist

$$\begin{aligned}P_{a \ b \ c}^1 &:= [D_{i_1} P_{i_2 \dots i_n}^{\text{Fod}}]_{\text{STF}} \\ &= \left[\frac{1}{n!} \sum_{\pi(I)} D_{i_1} P_{i_2 \dots i_n}^{\text{Fod}} \right]_{\text{TF}}.\end{aligned}$$

Das $\pi(I)$ steht dabei für eine Summe über alle Permutationen der Indexmenge

$$I := \{i_j\}_{j=1}^n.$$

Die Tensoren $P_{a \ b \ c}$ sind symmetrisch. Deshalb kann die Summation vereinfacht werden. Die Identifikation aller P_I mit beliebig permutiertem I führt auf

$$\begin{aligned}P_{a \ b \ c}^1 &= \left[\frac{1}{n!} \sum_{m=a,b,c} D_{i_m} P_{I \setminus \{i_m\}}^{\text{Fod}} (n-1)! \cdot m \right]_{\text{TF}} \\ &= \frac{1}{n} \left[a \cdot D_{\rho} P_{a-1 \ b \ c} + b \cdot D_{\zeta} P_{a \ b-1 \ c} + c \cdot D_{\varphi} P_{a \ b \ c-1} \right]_{\text{TF}},\end{aligned}$$

wobei der Faktor $(n-1)!$ den Umordnungsmöglichkeiten in I entspricht und m denen der Ableitung. Eine analoge Rechnung führt für den zweiten Teil mit

$$N := \frac{(n-1)(2n-3)}{2}$$

auf

$$\begin{aligned}
P_{a \ b \ c}^2 &:= N \left[\frac{1}{n!} \sum_{\pi(I)} R_{i_1 i_2} P_{i_3 \dots i_n}^{\text{Fod}} \right]_{\text{TF}} \\
&= N \left[\frac{1}{n!} \sum_{m=a,b,c} R_{m_1 m_2} P_{I \setminus \{m_1, m_2\}}^{\text{Fod}} \right. \\
&\quad \cdot (n-2)! \cdot \left. \begin{cases} m_1(m_2-1), & m_1 = m_2 \\ 2! \cdot m_1 \cdot m_2, & m_1 \neq m_2 \end{cases} \right]_{\text{TF}} \\
&= \frac{2n-3}{2n} \left[a(a-1) R_{\rho\rho} P_{a-2 \ b \ c} \right. \\
&\quad \left. + b(b-1) R_{\zeta\zeta} P_{a \ b-2 \ c} + 2ab R_{\rho\zeta} P_{a-1 \ b-1 \ c} \right]_{\text{TF}},
\end{aligned}$$

wobei der Übersicht halber die Indizes an R_{mn} im Sinne der Koordinaten gemeint sind und im geschweiften Teil der Klammer als a , b oder c sowie im letzten Schritt verschwindende Terme weggelassen wurden. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
(5.2.4) \quad P_{a \ b \ c} &= P_{a \ b \ c}^1 - P_{a \ b \ c}^2 \\
&= \frac{1}{n} \left[a \cdot D_{\rho} P_{a-1 \ b \ c} + b \cdot D_{\zeta} P_{a \ b-1 \ c} + c \cdot D_{\varphi} P_{a \ b \ c-1} \right. \\
&\quad \left. - \left(n - \frac{3}{2} \right) \left[a(a-1) R_{\rho\rho} P_{a-2 \ b \ c} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + b(b-1) R_{\zeta\zeta} P_{a \ b-2 \ c} + 2ab R_{\rho\zeta} P_{a-1 \ b-1 \ c} \right] \right]_{\text{TF}}.
\end{aligned}$$

Es ist bekanntlich

$$\begin{aligned}
(D_c T)^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} &= \partial_c T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \Gamma_{dc}^{a_1} T^{d \dots a_r}_{b_1 \dots b_s} + \dots + \Gamma_{dc}^{a_r} T^{a_1 \dots d}_{b_1 \dots b_s} \\
&\quad - \Gamma_{b_1 c}^d T^{a_1 \dots a_r}_{d \dots b_s} - \dots - \Gamma_{b_1 c}^d T^{a_1 \dots a_r}_{b_1 \dots d}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
D_{\rho} P_{a \ b \ c} &= \partial_{\rho} P_{a \ b \ c} - a \Gamma_{\rho\rho}^{\rho} P_{a \ b \ c} - b \Gamma_{\zeta\rho}^{\zeta} P_{a \ b \ c} \\
&\quad - b \Gamma_{\zeta\rho}^{\rho} P_{a+1 \ b-1 \ c} - a \Gamma_{\rho\rho}^{\zeta} P_{a-1 \ b+1 \ c} - c \Gamma_{\varphi\rho}^{\varphi} P_{a \ b \ c} \\
&= \partial_{\rho} P_{a \ b \ c} - a \partial_{\rho} k \cdot P_{a \ b \ c} - b \partial_{\rho} k \cdot P_{a \ b \ c} \\
&\quad - b \partial_{\zeta} k \cdot P_{a+1 \ b-1 \ c} + a \partial_{\zeta} k \cdot P_{a-1 \ b+1 \ c} - \frac{c}{\rho} P_{a \ b \ c}, \\
D_{\zeta} P_{a \ b \ c} &= \partial_{\zeta} P_{a \ b \ c} - a \Gamma_{\rho\zeta}^{\zeta} P_{a-1 \ b+1 \ c} - b \Gamma_{\zeta\zeta}^{\rho} P_{a+1 \ b-1 \ c} \\
&\quad - b \Gamma_{\zeta\zeta}^{\zeta} P_{a \ b \ c} - a \Gamma_{\rho\zeta}^{\rho} P_{a \ b \ c} \\
&= \partial_{\zeta} P_{a \ b \ c} - a \partial_{\rho} k \cdot P_{a-1 \ b+1 \ c} + b \partial_{\rho} k \cdot P_{a+1 \ b-1 \ c} \\
&\quad - b \partial_{\zeta} k \cdot P_{a \ b \ c} - a \partial_{\zeta} k \cdot P_{a \ b \ c}, \\
D_{\varphi} P_{a \ b \ c} &= \partial_{\varphi} P_{a \ b \ c} - a \Gamma_{\rho\varphi}^{\varphi} P_{a-1 \ b \ c+1} - c \Gamma_{\varphi\varphi}^{\rho} P_{a+1 \ b \ c-1} \\
&= -\frac{a}{\rho} P_{a-1 \ b \ c+1} + c \rho e^{-2k} P_{a+1 \ b \ c-1}.
\end{aligned}$$

Setzt man dies jetzt in Gleichung 5.2.4 ein, folgt nach Zusammenfassen der Terme Gleichung 18 aus [FHP89]:

$$\begin{aligned}
P_{a \ b \ c} &= \frac{1}{n} \left[a \partial_\rho P_{a-1 \ b \ c} + b \partial_\zeta P_{a \ b-1 \ c} \right. \\
&\quad - \left\{ a(a+2b-1) \partial_\rho k + 2 \frac{ac}{\rho} \right\} P_{a-1 \ b \ c} \\
&\quad - b(2a+b-1) \partial_\zeta k \cdot P_{a \ b-1 \ c} + a(a-1) \partial_\zeta k \cdot P_{a-2 \ b+1 \ c} \\
&\quad + b(b-1) \partial_\rho k \cdot P_{a+1 \ b-2 \ c} + c(c-1) \rho e^{-2k} \cdot P_{a+1 \ b \ c-2} \\
&\quad - \left(a+b-\frac{3}{2} \right) \left[a(a-1) R_{\rho\rho} P_{a-2 \ b \ c} \right. \\
(5.2.5) \quad &\quad \left. \left. + b(b-1) R_{\zeta\zeta} P_{a \ b-2 \ c} + 2ab R_{\rho\zeta} P_{a-1 \ b-1 \ c} \right] \right]_{\text{TF}}.
\end{aligned}$$

Man kann erkennen, dass auch dieser Ausdruck der Rekursionsrelation relativ kompliziert ist. Es ist auch zu sehen, dass die $P^{(n)}$ von den $P^{(n-1)}$ und $P^{(n-2)}$ abhängen. Es sind genau $3m$ Tensoren $m > 0$ ter Stufe, also genau $1 + \sum_{m=1}^n 3m = 1 + \frac{3}{2}n(n+1)$ Tensoren, die berechnet werden müssen, um alle $P^{(n)}$ zu kennen. Für beispielsweise die Berechnung des zehnten Moments werden alle Tensoren bis zur neunten Stufe und $P_{0 \ 10 \ 0}$ benötigt, also insgesamt 137 Stück.

Es gibt jedoch eine Möglichkeit, die Anzahl der zu berechnenden Ausdrücke weiter zu reduzieren. Dazu wird die folgende Aussage benötigt.

LEMMA 5.2.1. *Für beliebige Tensoren Q mit Metrik g , welche die Voraussetzungen nach Lemma 1.2.3 erfüllt, gilt*

$$[g_{(i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_n)}]_{\text{TF}} = 0.$$

BEWEIS. Fordert man, dass die Abbildung $[]_{\text{TF}}$ auf dem spurfreien Unterraum idempotent und linear sein soll, gilt für beliebige o.B.d.A. als symmetrisch angenommene Tensoren P :

$$\begin{aligned}
[P_{i_1 \dots i_{n+2}}]_{\text{TF}} &\stackrel{!}{=} [[P_{i_1 \dots i_{n+2}}]_{\text{TF}}]_{\text{TF}} \\
&\stackrel{\text{Lemma 1.2.3}}{=} [P_{i_1 \dots i_{n+2}}]_{\text{TF}} + A_2^n \cdot [g_{(i_1 i_2} P_{i_3 \dots i_n)}]_{\text{TF}} g^{ab} \\
&\quad + [\text{höhere Terme}]_{\text{TF}}.
\end{aligned}$$

Aus der Beliebigkeit von P folgt, dass

$$A_2^n \cdot [g_{(i_1 i_2} P_{i_3 \dots i_n)}]_{\text{TF}} g^{ab} = 0$$

ist. Die Umbenennung der einfachen Kontraktion von P mit g , $P_{i_1 \dots i_{n-1} i_n} g^{i_{n-1} i_n}$ in Q ergibt dann das Lemma. \square

Die Aussage kann auch ohne die zusätzliche Annahme der Idempotenz im Spinorformalismus gezeigt werden. Da dies hier jedoch zu weit führen würde, soll nur die Beweisidee dargestellt werden. Einer Symmetrisierung im Spinorraum entspricht

nach [Fri08] dem spurfreien Teil im Bündel

$$T_{(A_1 B_1 \dots A_p B_p)} = [T_{a_1 \dots a_p}]_{\text{TF}} \alpha_{A_1 B_1}^{\alpha_1} \cdots \alpha_{A_p B_p}^{\alpha_p}$$

mit der Spinorbasis α . Die Metrik ist in der Spinordarstellung jedoch antisymmetrisch, woraus die Aussage folgt.

Das Lemma gibt die Möglichkeit, in Gleichung 5.2.5 alle $P_{a b c}^{(m < n)}$ zu ersetzen durch

$$\begin{aligned} P_{a b c}^{(m < n)} &\rightarrow P_{a b c} + [g_{(i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_m)}]_{a b c} \\ &=: S_{a b c}, \end{aligned}$$

ohne die resultierenden $P_{a b c}^{(n)}$ zu verändern, da der spurfreie Teil des zusätzlichen Ausdrucks verschwindet. Man hätte naiver Weise von den $P_{a b c}$ bereits erwarten können, dass diese für $c \neq 0$ identisch verschwinden, da diese nach Definition Ableitungen des Potentials nach φ enthalten, welche durch die Axialsymmetrie alle verschwinden und zusätzlich $R_{i\varphi} = 0$ gilt. Dies ist jedoch nicht der Fall, da es sich um kovariante Ableitungen handelt. Unter Zuhilfenahme der $Q_{a b c}$ können jedoch die $S_{a b c}$ in dieser Form gewählt werden, was direkt Ausdruck der Axialsymmetrie ist:

LEMMA 5.2.2. *Die Q können so gewählt werden, dass für die $S_{a b c} \equiv 0$ mit $c \neq 0$ gilt. Sie sind dann gegeben durch*

$$Q_{a b c} = \begin{cases} -\frac{a+b+1}{\rho} e^{-2k} P_{a+1 b 0} & c = 0 \\ 0 & c \neq 0 \end{cases}.$$

BEWEIS. Vollständige Induktion. Für $n = 0$ ist $S^{(0)} = P^{(0)} = \phi$ ebenso ist für $n = 1$ $S_{a b c}^{(1)} = P_{a b c}^{(1)}$, also insbesondere $S_{0 0 1} = \partial_\varphi \phi = 0$. Angenommen, $S_{a b c}^{(m)} = 0$ für $c \neq 0$ und beliebige m . Dann gibt es in Gleichung 5.2.5 mit $P \rightarrow S$ nur den Term

$$P_{a b c}^{(n > m)} \Big|_{c=2} = \frac{1}{n} c (c-1) \rho e^{-2k} \cdot [S_{a+1 b c-2}]_{\text{TF}} \Big|_{c=2},$$

der für $c = 2$ einen von Null verschiedenen Ausdruck erzeugen kann. Es ist aber auch

$$\begin{aligned} P_{a b 2} &= [S_{a b 2}]_{\text{TF}} \\ &= [P_{a b 2} + [g_{(i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_m)}]_{a b 2}]_{\text{TF}}. \end{aligned}$$

Wählt man $[g_{(i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_m)}]_{a b 2}$ so, dass $S_{a b 2} = 0$, so ist die Aussage richtig. Setzt man außerdem $Q_{a b c} = 0$, wenn $c \neq 0$, dann ist mit $n = a + b + 2$

$$\begin{aligned} S_{a b 2} &= P_{a b 2} + \frac{2!(a+b)!}{n!} g_{\varphi\varphi} Q_{a b 0} \\ &= \frac{1}{n} 2(2-1) \rho e^{-2k} \cdot P_{a+1 b 0} + \frac{2!(n-2)!}{n!} \rho^2 Q_{a b 0} \\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

und somit ist

$$Q_{a \ b \ 0} = -\frac{a+b+1}{\rho} e^{-2k} \cdot P_{a+1 \ b \ 0}.$$

□

Durch die Axialsymmetrie ist es jetzt nicht mehr notwendig, alle $P_{a \ b \ c}$ zu berechnen, sondern es genügen die $S_{a \ b \ 0}$!

LEMMA 5.2.3. *Die $S_{a \ b \ 0}$ haben mit Lemma 5.2.2 die Form*

$$(5.2.6) \quad \begin{aligned} S_{a \ b \ 0} = & \frac{1}{a+b} \left[a \partial_\rho P_{a-1 \ b \ 0} + b \partial_\zeta P_{a \ b-1 \ 0} \right. \\ & - \left\{ a(a+2b-1) \partial_\rho k + \frac{a(a-1)}{\rho} \right\} P_{a-1 \ b \ 0} \\ & - b(2a+b-1) \partial_\zeta k \cdot P_{a \ b-1 \ 0} + a(a-1) \partial_\zeta k \cdot P_{a-2 \ b+1 \ 0} \\ & + b(b-1) \left(\partial_\rho k - \frac{1}{\rho} \right) \cdot P_{a+1 \ b-2 \ 0} \\ & - \left(a+b - \frac{3}{2} \right) \left[a(a-1) R_{\rho\rho} P_{a-2 \ b \ 0} + \right. \\ & \left. \left. b(b-1) R_{\zeta\zeta} P_{a \ b-2 \ 0} + 2ab R_{\rho\zeta} P_{a-1 \ b-1 \ 0} \right] \right]. \end{aligned}$$

BEWEIS. Nach Definition ist

$$\begin{aligned} S_{a \ b \ 0} &= P_{a \ b \ 0} + [g_{(i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_m)}]_{a \ b \ 0} \\ &= P_{a \ b \ 0} + \frac{(a+b-2)!}{(a+b)!} (a(a-1) g_{\rho\rho} Q_{a-2 \ b \ 0} + b(b-1) g_{\zeta\zeta} Q_{a \ b-2 \ 0}) \\ &= P_{a \ b \ 0} + \frac{e^{2k}}{(a+b)(a+b-1)} (a(a-1) Q_{a-2 \ b \ 0} + b(b-1) Q_{a \ b-2 \ 0}) \\ &= P_{a \ b \ 0} - \frac{1}{(a+b) \cdot \rho} (a(a-1) P_{a-1 \ b \ 0} + b(b-1) P_{a+1 \ b-2 \ 0}). \end{aligned}$$

Setzt man jetzt in Gleichung 5.2.5 $c = 0$, dann ist das Lemma bewiesen. □

Im axialsymmetrischen Fall sind die Momente gegeben als die Projektion der Tensoren $P_{a \ b \ c}$ auf die Symmetrieachse in Unendlich. Um die Momente auszurechnen, muss somit die spurfreie Projektion der $S_{a \ b \ c}$ ausgerechnet werden. Dabei hilft folgende Aussage:

LEMMA 5.2.4. *Gilt $g_{aa} = g^{aa} = 1$ und $g_{ab} = 0$ für $a \neq b$ sowie $T_{a\dots abc} g^{bc} = T_{a\dots aaa}$, dann ist*

$$T_{a\dots a}^{\text{TF}} = \frac{n!}{(2n-1)!!} T_{a\dots a}.$$

BEWEIS. Unter den Voraussetzungen und mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.2 ist

$$\begin{aligned}
T_{a\dots a}^{\text{TF}} &= T_{a\dots a} + T_{a\dots a} \sum_{i=2,4,\dots}^n A_i^n \\
&= T_{a\dots a} \sum_{i=0,2,\dots}^n (-1)^{i/2} \frac{n! \cdot (2n-i-1)!!}{i!! \cdot (n-i)! \cdot (2n-1)!!} \\
&= \frac{n!}{(2n-1)!!} T_{a\dots a} \sum_{i=0,2,\dots}^n (-1)^{i/2} \frac{(2n-i-1)!!}{i!! \cdot (n-i)!} \\
&= \frac{n!}{(2n-1)!!} T_{a\dots a},
\end{aligned}$$

da $\sum_{i=0,2,\dots}^n (-1)^{i/2} \frac{(2n-i-1)!!}{i!! \cdot (n-i)!} = 1$, was über direktes Nachrechnen oder vollständige Induktion gezeigt werden kann. \square

Da $h_{\zeta\zeta} = 1$ in Λ gilt, kann dieses Lemma für die Extraktion des spurfreien Teils der $S_{a \ b \ 0}$ herangezogen werden. Die Fodor'schen Momente aus den Gleichungen 4.5.1 und 4.5.2 sind dann gegeben als

$$(5.2.7) \quad Q_n^{\text{Fod}} = \frac{1}{(2n-1)!!} S_{0 \ n \ 0}|_{\Lambda},$$

da dies der ζ -Projektion der $S_{a \ b \ c}$ geteilt durch $n!$ entspricht.

Der Algorithmus besteht demnach zuerst aus der Berechnung der a_{ij} in Abhängigkeit der m_n nach Gleichung 5.1.2 bis zu einer gewünschten Ordnung. Damit ist ϕ nach Gleichung 5.1.1 gegeben und der Ricci-Tensor sowie die Ableitungen des Potentials k werden nach den Gleichungen 5.2.1 bestimmt. Im Anschluss werden die $S_{a \ b \ 0}$ nach Gleichung 5.2.6 iterativ berechnet, woraus sich dann mit Gleichung 5.2.7 schlussendlich die Momente ergeben.

5.3. Ergebnisse

Alle Multipole aus [FHP89] konnten, ebenso wie die Herleitung des Algorithmus, bestätigt werden. Darüber hinaus wurde das elfte Moment Q_{11}^{Fod} mit Hilfe von Mathematica [Wol08] bestimmt. Die Struktur aller Momente kann mit der Konvention

$$M_{ij} := m_i m_j - m_{i-1} m_{j+1}$$

zusammengefasst werden als

$$\begin{aligned}
(5.3.1) \quad Q_n^{\text{Fod}} &= m_n + \sum_{k>l+1}^{n-2} M_{kl} \cdot \sum_p a_p(k, l) \cdot \\
&\quad \prod_{I(p,k,l)} \bar{m}_0^{i_1} \cdots \bar{m}_{n-4}^{i_{n-4}} \cdot m_0^{j_1} \cdots m_{n-5}^{j_{n-5}},
\end{aligned}$$

wobei $I = \{i_1, \dots, i_{n-4}, j_1, \dots, j_{n-5}\}$ eine Indexmenge darstellt und die $a_p(k, l)$ skalare Vorfaktoren sind.

Die ersten fünf Momente haben die bekannte Form

$$\begin{aligned} Q_0^{\text{Fod}} &= m_0, \\ &\vdots \\ Q_3^{\text{Fod}} &= m_3, \\ Q_4^{\text{Fod}} &= m_4 - \frac{1}{7}M_{20}\bar{m}_0. \end{aligned}$$

Alle Weiteren sind auf Grund ihrer Länge im Anhang A nachzuschlagen.

Teil 3

Die Quadrupol-Vermutung

Bardeen und Wagoner stellten bereits 1971 in [BW71] bei numerischen Berechnungen zur starr rotierenden Staubscheibe fest, dass das von ihnen bestimmte Quadrupolmoment $Q_2^{\text{B\&W}}$ dieser Konfiguration immer größer ist als ein entsprechendes Kerr-Quadrupolmoment $Q_{2,\text{Kerr}}^{\text{B\&W}}$ bei gleicher Masse und Drehimpuls bzw. im ultrarelativistischen Grenzfall dieses beliebig nahe erreicht:

$$(5.3.2) \quad |Q_2^{\text{B\&W}}| \geq |Q_{2,\text{Kerr}}^{\text{B\&W}}|.$$

Numerische Untersuchungen zu verschiedenen Raumzeiten mit Hilfe des AKM-Programms und der Definition der Momente nach Fodor aus dem vorhergehenden Teil haben Hinweise darauf gegeben, dass diese Eigenschaft eventuell auch für eine Reihe weiterer stationärer und axialsymmetrischer Raumzeiten gilt. In diesem Teil der Arbeit sollen neben der Formulierung auch Untersuchungen zur Unterstützung der “Quadrupol-Vermutung” vorgestellt werden.

Das erste Kapitel dieses Teils beinhaltet neben der Formulierung der Vermutung eine kurze Wiederholung der Kerr-Raumzeit sowie analytische Untersuchungen der Ungleichung in verschiedenen Szenarien. Diese umfassen zum einen im nichtrelativistischen Grenzfall die Maclaurin-Ellipsoiden sowie starr rotierende Ringe jedoch auch die starr rotierende Staubscheibe, was die Ergebnisse von Bardeen und Wagoner bestätigt.

Es gibt nur wenige analytische Lösungen der Feldgleichungen, die auch physikalisch aussagekräftig sind. Um dennoch die Vermutung anhand von verschiedenen Raumzeiten überprüfen zu können, bietet es sich an, numerische Experimente durchzuführen. Im zweiten und dritten Kapitel dieses Teils wird das numerische Verfahren vorgestellt sowie die Resultate der Untersuchungen präsentiert.

Dem Quadrupolmoment kommt im folgenden Teil der Arbeit eine besondere Stellung zu, weshalb es ab jetzt die prägnantere Bezeichnung Q tragen soll:

$$Q := Q_2^{\text{Fod}}.$$

Weiterhin werden in diesem Teil die Momente nach Fodor verwendet, weshalb die zusätzliche Kennzeichnung entfällt.

Formulierung und analytische Hinweise

6.1. Die Kerr-Raumzeit

Roy P. Kerr veröffentlichte 1963 in [Ker63] seine zweiparametrische Lösung der Einsteingleichungen. Sie stellt die einzige stationäre und axialsymmetrische Lösung eines schwarzen Lochs umgeben von Vakuum dar, siehe [Heu96]. Es gibt verschiedene Ansätze, die Lösung herzuleiten. Darauf soll an dieser Stelle nicht eingegangen werden. Für eine Diskussion der interessanten Eigenschaften der Lösung wird auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen, siehe z.B. [Cha04]. Nachgeschlagen werden kann die Herleitung als Randwertproblem in [MAK⁺08]. Dort folgt das Ernst-Potential auf der positiven Achse $A^+ := \{(\rho, \zeta) : \rho = 0, \zeta > 0\}$ mit

$$f|_{A^+} = \frac{\zeta - M - ia}{\zeta + M - ia}.$$

Damit ist auf A^+ nach Gleichung 4.3.1 und bei Beachtung der geometrischen Reihe

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{M}{\zeta - ia} \\ &= \frac{M}{\zeta} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{ia}{\zeta}\right)^n \end{aligned}$$

und die m_n nach Gleichung 5.1.3 gegeben durch

$$m_n = M \cdot (ia)^n.$$

Nimmt man jetzt an, die bis einschließlich des elften Moments bekannte Struktur der Momente ist generell gegeben durch Gleichung 5.3.1, dann sind die Fodor'schen Multipolmomente der Kerr-Raumzeit

$$\begin{aligned} M_{2s}^{\text{Fod}} &= (-1)^s M a^{2s}, \\ J_{2s+1}^{\text{Fod}} &= (-1)^s M a^{2s+1}, \end{aligned}$$

da alle M_{ij} identisch verschwinden.

Hansen berechnete die Geroch-Hansen-Momente der Kerr-Raumzeit beliebiger Ordnung in [Han73]. Die Massenmomente sind, verglichen mit denen nach Fodor, dabei erwartungsgemäß nach Abschnitt 4.4 um ein Vorzeichen verschieden, wohingegen die Strommomente identisch sind. Dies kann auch als Hinweis interpretiert werden, dass die Fodor'schen Momente ab zwölfter Stufe die Struktur aus Gleichung 5.3.1 beibehalten.

Die äußerst interessante Frage, welche Quellen eine entsprechende Innenlösung darstellen können, ist bis jetzt nicht beantwortet. Die Raumzeit muss einer physikalisch relativistischen Situation entsprechen, da das Drehpotential b der Kerr-Lösung nicht klein ist gegenüber e^{2U} . Das heißt, Ströme werden eine starke Rolle spielen und das ist im nichtrelativistischen Grenzfall ausgeschlossen. So hat Hernandez in [Her67] dargelegt, dass es keine Newton'schen Quellen geben kann, jedoch wurde die Herangehensweise durch Krasinski in dessen Übersichtsartikel [Kra78] zu möglichen Quellen der Kerr-Lösung stark kritisiert. Ein bekanntes analytisches Beispiel einer Materieverteilung, deren Außenfeld bei bestimmter Parameterwahl gegen die Kerr-Lösung konvergiert, ist die starr rotierende Staubscheibe nach Neugebauer und Meinel [NM93, NM95]. Diese entspricht im relativistischen Limes einem extremen schwarzen Loch mit $J = M^2$.

6.2. Formulierung der Vermutung

Das Kerr-Quadrupolmoment ist gegeben als

$$\begin{aligned} Q_{\text{Kerr}} &= -Ma^2 \\ &= -\frac{J^2}{M}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich in Anlehnung an Gleichung 5.3.2 die

QUADRUPOL-VERMUTUNG. *Für axialsymmetrisch stationäre und asymptotisch flache Raumzeiten mit Drehimpuls J , Masse M und Quadrupolmoment Q gilt universell*

$$(6.2.1) \quad \left| \frac{J^2}{M \cdot Q} \right| \leq 1,$$

wenn die Raumzeit aus einem starr rotierenden Flüssigkeitskörper, umgeben von Vakuum, besteht.

Die vielen Voraussetzungen an die Raumzeit sind notwendig, da sonst eine invariante Charakterisierung der Größen nicht erfolgen kann. Außerdem wurde die Vermutung nur anhand von starr rotierenden Flüssigkeitskonfigurationen überprüft, was die Vermutung noch weiter einschränkt. Die Aussage wird jedoch nicht eingeschränkt durch die Zustandsgleichung der Materie.

Für ein rotierendes Schwarzes-Loch nach Kerr gilt selbstverständlich die Gleichheit. Im Falle eines statischen Objektes ist die Lösung durch die Schwarzschild-Raumzeit bzw. durch Kerr mit $a = 0$ gegeben. In diesem Fall macht das Verhältnis erstmal keinen Sinn, man kann jedoch den Grenzprozess verschwindender Winkelgeschwindigkeit bei spheroidalen Körpern nichtverschwindender Masse betrachten. Hier stellt sich heraus, dass für die untersuchten Körper das Verhältnis gegen einen Wert kleiner eins, jedoch größer als Null, konvergiert:

$$\left| \frac{J^2}{M \cdot Q} \right| \xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} \alpha \in (0, 1).$$

Im Newton'schen Grenzfall der Maclaurin-Ellipsoide ist dieser Grenzwert sogar bekannt, siehe Abschnitt 6.3.1. Für den allgemeinen Fall steht die Hartle-Approximation langsam rotierender Körper zur Verfügung, bei der das Problem auf die Bestimmung der Integrationskonstanten K aus den Gleichungen (22a) und (26) in [HT68] zurückzuführen ist.

Es ist eine interessante Frage, ob die Vermutung im Falle von Einstein-Maxwell-Feldern zutrifft. Anschaulich gesprochen, könnte etwa die Oberfläche des zentralen Objekts durch die zusätzlich auftretenden Kräfte so stark deformiert werden, dass das Quadrupolmoment verschwindet, der Drehimpuls jedoch nicht. Es ist also nicht zu erwarten, dass in diesem Fall die Vermutung auch noch zutrifft. Sollte sie gelten, dann stellt sie eine Eigenschaft von Raumzeiten in der Einsteinschen Theorie dar, wenngleich die Voraussetzungen eventuell mit Hilfe zukünftiger Betrachtungen abgeschwächt werden können.

6.3. Analytische Tests

6.3.1. Die Maclaurin Ellipsoide. Bevor versucht wird, eine Vermutung in der allgemeinen Relativitätstheorie zu unterlegen oder gar zu beweisen, ist es angebracht, diese im Newton'schen Grenzfall zu untersuchen. Bereits 1742 hat Maclaurin [Mac01] das Problem rotierender Flüssigkeitskörper mit konstanter Massendichte gelöst. Einen Überblick kann man in [MAK⁺08] erhalten, worauf sich auch die hier angegebenen Rechnungen beziehen.

Es stellt sich heraus, dass die entstehenden Gleichgewichtsfiguren Ellipsoide mit Halbachsen $a = b > c$ sind. Die gravitative Masse M und die konstante Massendichte μ sind dann verknüpft durch

$$M = \frac{4\pi}{3}\mu a^2 c.$$

Der Drehimpuls J in Bezug auf die Rotationsachse ist gegeben durch

$$\begin{aligned} J &= I\Omega \\ &= \frac{2}{5}Ma^2\Omega. \end{aligned}$$

Da für gegebenes μ nur zwei freie Parameter zu wählen sind, hängt Ω von a und c ab. Maclaurin konnte zeigen, dass

$$\begin{aligned} \frac{\Omega^2}{\pi\mu} &= \frac{2}{\epsilon^3}\sqrt{1-\epsilon^2}(3-2\epsilon^2)\arcsin\epsilon - \frac{6}{\epsilon^2}(1-\epsilon^2) \\ &=: F(\epsilon) \end{aligned}$$

gilt mit der Exzentrizität

$$\epsilon := \sqrt{1 - c^2/a^2}.$$

Das Newton'sche Quadrupolmoment eines solchen Ellipsoiden ist gegeben durch

$$Q_{zz} = -\frac{2}{5}M(a^2 - c^2)$$

und wegen der Axialsymmetrie ist nach Gleichung 4.5.1

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{2!} \cdot Q_{zz} \\ &= -\frac{1}{5} M(a^2 - c^2). \end{aligned}$$

Schlussendlich ist

$$\begin{aligned} \left| \frac{J^2}{MQ} \right| &= \frac{4}{5} \Omega^2 \frac{a^4}{a^2 - c^2} \\ &= \frac{3}{5} \frac{M}{c} \frac{a^2}{a^2 - c^2} F(\epsilon) \\ &= \frac{3}{5} \frac{M}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \epsilon^2} \epsilon^2} F(\epsilon). \end{aligned}$$

Im Limes einer Kugel, gilt $\epsilon \rightarrow 0$, $F(\epsilon) = \frac{8}{15} \epsilon^2 + O(\epsilon^4)$ und somit

$$\begin{aligned} \left| \frac{J^2}{MQ} \right| &\rightarrow \frac{8}{25} \frac{M}{a} + \frac{M}{a} O(\epsilon^2) \\ &\ll 1, \end{aligned}$$

da $M \ll a$ im nichtrelativistischen Grenzfall gelten muss. Für $\epsilon \rightarrow 1$, den Scheiben-Grenzfall, geht

$$\begin{aligned} \left| \frac{J^2}{MQ} \right| &\rightarrow \frac{3}{5} \pi \frac{M}{a} \\ &\ll 1. \end{aligned}$$

Da $F(\epsilon)$ für $\epsilon \in [0, 1]$ beschränkt ist, gilt, dass

$$\left| \frac{J^2}{MQ} \right| \ll 1$$

immer richtig sein muss für die Maclaurin-Ellipsoide in Newton'scher Näherung.

Es existiert sogar eine Verallgemeinerung im Sinne einer Post-Newtonschen Behandlung beliebiger Ordnung durch Petroff in [Pet03]. Jedoch sind die entstehenden Formeln so unhandlich, dass eine analytische Darstellung hier unzweckmäßig wäre. Allerdings hat Petroff gezeigt, dass seine Ergebnisse für höhere Ordnungen mit denen mit Hilfe des AKM-Programms erzeugten Lösungen homogener Zustandsgleichungen hinreichend genau übereinstimmen. Deshalb kann auf die entsprechende numerische Behandlung hingewiesen werden, die in Abschnitt 8.1 folgt.

6.3.2. Starr rotierende homogene Ringe. Mit Hilfe der Maclaurin-Ellipsoide konnte eine große Klasse starr rotierender homogener Körper in der nichtrelativistischen Näherung abgedeckt werden, von kugelsymmetrischen Körpern bis hin zu Scheiben. Der nächste Test der Vermutung bezieht sich auf starr rotierende dünne Ringe, ebenfalls in der nichtrelativistischen Näherung. Es werden demzufolge ähnliche Voraussetzungen wie im Falle der Ellipsoide, jedoch mit einer anderen Topologie, gewählt. Die Schwierigkeit besteht darin, dass die Oberfläche des Rings sich als Gleichgewichtszustand einstellt und nicht vorgegeben werden kann. Deshalb gehen die Ansätze zur Berechnung meist vom Grenzfall des dünnen Rings aus,

in dem der Ringradius a , verglichen mit dem Abstand des Ringmittelpunktes zur Symmetrieachse R , vernachlässigbar wird:

$$\begin{aligned}\sigma &:= \frac{a}{R} \\ &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Die Betrachtung des Problems geht zurück auf Arbeiten von Kowalevski, Poincaré und Dyson Ende des 19. Jahrhunderts. Ein konstruktives Verfahren zur Berechnung der Feldgrößen in beliebigen σ -Ordnungen wurde durch Horatschek und Petroff in [PH08] gegeben. Die dort aufgeführten Ergebnisse für die erste Ordnung in σ sollen hier verwendet werden. Das Ergebnis gilt damit für diese Näherung.

Die relevanten Größen der Masse M , Drehimpuls J und Quadrupolmoment Q sind mit konstanter Massendichte μ und $\lambda := \ln \frac{8}{\sigma} - 2$ gegeben durch

$$\begin{aligned}M &= 2\pi^2 \mu a^3 (\sigma^{-1} + o(\sigma^{-1})) \\ &\approx 2\pi^2 \mu a^3 \sigma^{-1}, \\ J^2 &= \pi^5 \mu^3 (4\lambda + 3) a^{10} (\sigma^{-2} + o(\sigma^{-2})) \\ &\rightarrow 4\pi^5 \mu^3 \lambda a^{10} \sigma^{-2}, \\ Q &= -\frac{1}{2} M (R^2 + \frac{1}{4} a^2) \\ &\rightarrow -\frac{1}{2} M R^2.\end{aligned}$$

Damit ergibt sich in erster σ -Ordnung

$$\left| \frac{J^2}{MQ} \right| \approx \pi \mu \lambda \sigma^2 b^2.$$

Mit Zunahme der Winkelgeschwindigkeit

$$\Omega^2 \approx \pi \mu \lambda \sigma^2$$

folgt sofort, dass

$$\begin{aligned}\left| \frac{J^2}{MQ} \right| &\approx \Omega^2 b^2 \\ &= v_{\text{char}}^2 \ll 1\end{aligned}$$

gelten muss. Dies ist ein interessantes Ergebnis. Das Verhältnis entspricht näherungsweise einer charakteristischen Geschwindigkeit der Teilchen im Ring.

Allgemein kann im Falle starr rotierender Körper im nichtrelativistischen Grenzfall mit Hilfe des Trägheitsmomentes, bezogen auf die Symmetrieachse, folgende grobe Abschätzung durchgeführt werden:

$$\begin{aligned}\left| \frac{J^2}{MQ} \right| &= \left| \frac{\Theta^2 \Omega^2}{MQ} \right| \\ &= \left| \frac{\Theta}{Q} \right| v_{\text{char}}^2.\end{aligned}$$

Wobei die charakteristische Geschwindigkeit motiviert ist durch die kinetische Energie

$$\begin{aligned} 2E_{\text{kin}} &= \Theta\Omega^2 \\ &=: Mv_{\text{char}}^2. \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung, dass das Verhältnis von Trägheitsmoment Θ zu Quadrupolmoment Q beschränkt ist, sollte die Vermutung zumindest für alle starrotierenden Körper im Newton'schen Grenzfall gelten.

6.3.3. Die starr rotierende Staubscheibe. Das Problem der starr rotierenden Staubscheibe in der allgemeinen Relativitätstheorie wurde in voller Analytizität von Neugebauer und Meinel gelöst [NM93, NM95]. Die zugehörigen Multipolmomente wurden von Kleinwächter, Meinel und Neugebauer [KMN95] wenig später berechnet. Die Lösung hängt nur vom Parameter

$$\mu = 2\Omega^2 \rho_0^2 e^{-2V_0}$$

ab. Die ersten drei Momente sind gegeben durch

$$\begin{aligned} 2\Omega \cdot M &= -b_0 - \Omega_0 c_1, \\ 4\Omega^2 \cdot J &= -b_0 - 2\Omega_0 c_1, \\ 8\Omega^3 \cdot Q &= b_0 + (2 + b_0^2)\Omega_0 c_1 + b_0\Omega_0^2 c_1^2 + (\Omega_0^3(c_1^3 - 12c_3))/3. \end{aligned}$$

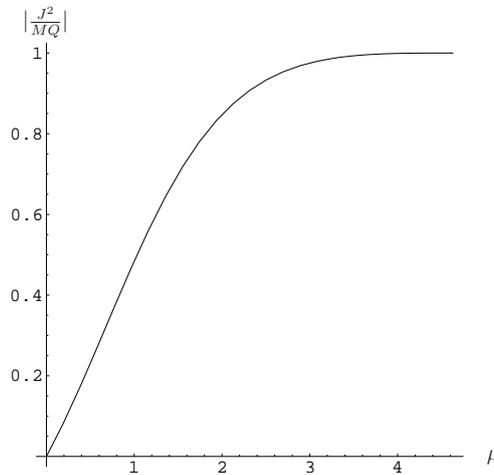


ABBILDUNG 6.3.1. Die Vermutung ist richtig für die starr rotierende Staubscheibe.

Die Bedeutung von $b_0(\mu)$, $\Omega_0(\mu)$ usw. kann nachgeschlagen werden in Anhang B. Abbildung 6.3.1 zeigt, dass $|\frac{J^2}{MQ}| \leq 1$ im gesamten Parameterbereich gilt, also $\forall \mu \leq \mu_0 \approx 4.63$. Wie erwartet, geht das Verhältnis im relativistischen Grenzfall gegen 1, da die Staubscheibe dann im Außenfeld einem extremen Kerr-schwarzen Loch beliebig nahe kommt.

Zum numerischen Verfahren

Man kann sagen, dass die numerische Simulation sich in den letzten Jahrzehnten zu einem dritten Standbein der Naturwissenschaften neben Theorie und Experiment entwickelt hat. Besonders in der Relativitätstheorie fehlt die Möglichkeit, reale Experimente durchzuführen. Die an modernen Rechnern möglichen Simulationen geben oft Hinweise auf analytische Gesetzmäßigkeiten, so wie in dem Fall der Quadrupol-Vermutung. Bevor die im vorhergehenden Kapitel gegebenen Rechnungen angestellt werden konnten, ergab eine von Herrn Meinel angeregte Untersuchung des Quadrupolmoments den Hinweis auf die Vermutung.

Alle Berechnungen wurden mit Hilfe von verschiedenen Versionen des AKM-Programms durchgeführt. Dieses berechnet das Gravitationsfeld stationärer, axial- und äquatorsymmetrischer Raumzeiten von Flüssigkeitskörpern verschiedener Zustandsgleichungen, wie etwa rotierende Neutronensterne oder Ringkonfigurationen mit Hilfe von spektralen Methoden und variablen Gebietsaufteilungen. Es wird bewusst auf eine ausführliche Vorstellung des Programms verzichtet, da eine komplett funktionstüchtige Version in den Ergänzungen zu [MAK⁺08]¹ inklusive Dokumentation heruntergeladen werden kann. Weiterhin wurde die Funktionsweise des Programms beschrieben in [AKM02, AKM03] sowie in den Diplomarbeiten von Schöbel [Sch03] und Teichmüller [Tei07].

Das Kapitel begründet die physikalischen Voraussetzungen des AKM-Programms und stellt die Berechnung des Quadrupolmoments unter diesen dar, wobei die Überlegungen direkt auf höhere Momente übertragbar sind. Einige Tests zur Berechnung der Momente werden im letzten Abschnitt vorgestellt.

7.1. Voraussetzungen und Einschränkungen

Im Folgenden soll kurz dargelegt werden, unter welchen Voraussetzungen die numerischen Experimente durchgeführt wurden und ob diese eine Einschränkung darstellen.

Stationarität: Stationarität ist eine Voraussetzung für die Definition der Momente nach Geroch-Hansen. Ein Vergleich zur Kerr-Lösung macht im Rahmen der Vermutung für dynamische Raumzeiten auch keinen Sinn.

Starre Rotation: Keine zwingende Bedingung, jedoch eine Näherung, die den Parameterraum einschränkt. Die Frage nach einem sinnvollen Rotationsgesetz für die jeweiligen Fälle ist nicht trivial. Schon allein die mit

¹<http://www.tpi.uni-jena.de/gravity/relastro/rfe/>, Stand 25.09.08

helioseismologischen Methoden gemessene differentielle Rotation der Sonne ist nicht aus einem allgemeinen Prinzip ableitbar, vgl. z.B. [RH04].

Die offene Frage ist, ob ein physikalisch sinnvoll differentiell rotierendes Fluid ein verschwindendes Quadrupolmoment besitzen kann.

Axialsymmetrie: Zwar wurde der allgemeine Fall noch nicht bewiesen, jedoch kann davon ausgegangen werden, dass stationäre Lösungen von starr rotierenden Flüssigkeitskörpern in der allgemeinen Relativitätstheorie auch axialsymmetrisch sein müssen. Es würde anderenfalls zur Abstrahlung von Gravitationswellen kommen.

Asymptotische Flachheit: Die asymptotische Flachheit entspricht in der allgemeinen Relativitätstheorie der Idealisierung eines isolierten Objektes im Raum.

Ideale Flüssigkeit: Viele astrophysikalisch interessante Objekte können in guter Näherung so modelliert werden. Der Energie-Impulstensor einer idealen Flüssigkeit ist gegeben durch

$$(7.1.1) \quad T_{ik} = (\mu + p)u_i u_k + p g_{ik}$$

mit Massendichte² μ , Druck p und dem Geschwindigkeitsfeld der Teilchen u_i .

Äquatorsymmetrie: Im Newton'schen Grenzfall konnte bewiesen werden, dass Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten diese Eigenschaft besitzen, siehe [Lic33]. Es wird vermutet, dass dies auch in der ART gilt.

7.2. Die Bestimmung des Quadrupolmoments

Die Betrachtungen nach Fodor aus Teil 2 bezogen sich auf Koordinaten, in denen im Vakuum die immer mögliche Wahl $W = \rho$ getroffen ist. Aus Gründen des stetigen Übergangs der metrischen Funktionen und ihrer Ableitungen an der Flüssigkeitsoberfläche wurde diese Wahl im AKM-Programm nicht verwendet. In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, wie trotzdem das Quadrupolmoment aus den vorhandenen Potentialen berechnet werden kann. Die Vorgehensweise ist auch auf höhere Momente übertragbar.

7.2.1. Physikalische Grundlagen. Das AKM-Programm berechnet numerisch Lösungen der Einsteingleichungen im axialsymmetrisch stationären Fall für Sterne und Ringe verschiedener Zustandgleichungen. Zusätzlich wird Äquatorsymmetrie vorausgesetzt. Wie in Kapitel 4 dargelegt, kann eine axialsymmetrisch stationäre Raumzeit immer in Lewis- Papapetrou-Koordinaten angegeben werden als

$$\begin{aligned} g &= e^{-2U} [e^{2k}(d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\varphi^2] - e^{2U} (dt + a d\varphi)^2 \\ &= e^{2\alpha}(d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 e^{-2\nu} (d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\nu} dt^2 \end{aligned}$$

²In Einheiten mit $c = 1$ ist kein Unterschied mehr zwischen Energiedichte ϵ und Massendichte μ .

mit den metrischen Funktionen U , k , a bzw. ν , ω , α sowie W . Die erste hier angegebene Form der Metrik ist mit der aus Gleichung 4.1.1 identisch, die zweite Form entspricht der im Programm implementierten Version. Die zwei Sätze von Funktionen sind verknüpft durch

$$\begin{aligned}\alpha &= k - U, \\ \frac{e^{2\nu}}{W} \pm \omega &= \frac{1}{W e^{-2U} \mp \alpha},\end{aligned}$$

sowie durch Skalarprodukte der Killingvektoren $\xi = \partial_t$ und $\eta = \partial_\varphi$ für Stationarität und Axialsymmetrie:

$$(7.2.1) \quad \begin{aligned}g(\xi, \xi) &= -e^{2U} \\ &= -e^{2\nu} + \omega^2 W^2 e^{-2\nu},\end{aligned}$$

$$(7.2.2) \quad \begin{aligned}g(\eta, \eta) &= W^2 e^{-2U} - a^2 e^{2U} \\ &= W^2 e^{-2\nu},\end{aligned}$$

$$(7.2.3) \quad \begin{aligned}g(\xi, \eta) &= -a e^{2U} \\ &= -\omega W^2 e^{-2\nu}.\end{aligned}$$

Es ist bereits bekannt, dass für $W = \rho$ die Ernst-Gleichung $\Re(f) \Delta f = (\nabla f)^2$ im Vakuum mit dem komplexen Ernst-Potential $f = e^{2U} + ib$ gilt.

7.2.2. Multipole und Äquatorsymmetrie. Nach Gleichung 5.1.3 auf Seite 40 sind die Multipole M_n in Axialsymmetrie und bei der Wahl $W = \rho$ durch die Entwicklung des Potentials ϕ auf der oberen Hälfte der Symmetrieachse in Potenzen von $1/\zeta$ gegeben durch

$$(7.2.4) \quad \begin{aligned}\Psi(\zeta) := \phi(\rho, \zeta)|_{A^+} &= \frac{1-f}{1+f} \Big|_{A^+} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m_n}{\zeta^{n+1}}\end{aligned}$$

mit $M_0 = m_0, \dots, M_3 = m_3, M_4 = m_4 - \frac{1}{7} \bar{m}_0(m_2 m_0 - m_0^2)$ etc.

Es ist insbesondere das Quadrupolmoment

$$\begin{aligned}Q &= \Re M_2 \\ &= \Re m_2,\end{aligned}$$

also

$$Q = \Re \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0}.$$

Bekannt ist, dass im äquatorsymmetrischen Fall

$$f(\zeta) \cdot \overline{f(-\zeta)} = 1$$

gilt, vgl. [MAK⁺08]. Dies übersetzt sich sofort in

$$\Psi(\zeta) = -\overline{\Psi(-\zeta)}$$

bzw.

$$m_l = (-1)^l \bar{m}_l.$$

Somit ist m_l reell für gerade l und rein imaginär für ungerade l . Damit gilt bei Äquatorsymmetrie

$$Q = m_2.$$

Um ein Verhältnis zwischen den Entwicklungskoeffizienten der Potentiale b und U sowie den Multipolmomenten M_n zu bekommen, wird auf A^+ der Ansatz

$$f = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \zeta^{-n}$$

gewählt. Mit der Masse M und dem Drehimpuls J ergibt sich dann nach Koeffizientenvergleich mit Gleichung 7.2.4

$$(7.2.5) \quad M \equiv m_0 = -\frac{f_1}{2},$$

$$(7.2.6) \quad iJ \equiv m_1 = \frac{f_1^2}{4} - \frac{f_2}{2},$$

$$(7.2.7) \quad Q \equiv m_2 = -\frac{f_1^3}{8} + \frac{1}{2}f_1 f_2 - \frac{f_3}{2}.$$

Es werden f_1 und f_2 in M und J ausgedrückt und die Äquatorsymmetrie benutzt, um einen Ausdruck für Q zu bekommen. So folgt

$$\begin{aligned} iJ &= M^2 - \frac{f_2}{2}, \\ f_2 &= 2(M^2 - iJ), \\ Q &= -M^3 + 2iMJ - \frac{f_3}{2}. \end{aligned}$$

f_2 muss dabei diese Gestalt haben, da sonst m_1 nicht rein imaginär wird. Da ferner die Potentiale b und U in der Nähe von Λ reell sind, kann man sofort die Entwicklung von b auf A^+ angeben:

$$b = -\frac{2J}{\zeta^2} + \frac{4MJ}{\zeta^3} + O\left(\frac{1}{\zeta^4}\right).$$

Weiterhin muss gelten

$$(7.2.8) \quad Q = -M^3 - \frac{\Re f_3}{2}.$$

$\Re f_3$ hängt nur von den Entwicklungskoeffizienten von U ab. Es folgt auf A^+ der Ansatz

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} U_n \zeta^{-n}$$

und somit ist auf A^+

$$\begin{aligned} e^{2U} &= 1 + \frac{2U_1}{\zeta} + \frac{2U_1^2 + 2U_2}{\zeta^2} + \frac{\frac{4}{3}U_1^3 + 4U_1U_2 + 2U_3}{\zeta^3} + O\left(\frac{1}{\zeta^4}\right) \\ &\equiv \sum_{n=0}^{\infty} \Re f_n \zeta^{-n}. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit 7.2.5 und 7.2.6 ergibt

$$(7.2.9) \quad U_1 = -M,$$

$$(7.2.10) \quad U_1^2 + U_2 = M^2.$$

Damit ist klar, dass

$$U_2 \equiv 0.$$

gelten muss. Es bleibt noch Gleichung 7.2.8 auszuwerten:

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}M^3 + 2U_3 &= -2Q - 2M^3 \\ (7.2.11) \quad Q &= -U_3 - \frac{1}{3}M^3. \end{aligned}$$

Somit hat U auf A^+ die Gestalt

$$U = -\frac{M}{\zeta} - \frac{\frac{1}{3}M^3 + Q}{\zeta^3} + O\left(\frac{1}{\zeta^4}\right).$$

Dies gilt nur im Falle von $W = \rho$.

BEISPIEL 7.2.1. Das Kerr-Quadrupolmoment

Das Ernst-Potential der Kerr-Lösung auf A^+ ist gegeben durch

$$\begin{aligned} f &= \frac{\zeta - M - ia}{\zeta + M - ia}, \\ \Re f &= \frac{\zeta^2 - M^2 + a^2}{(M + \zeta)^2 + a^2} = e^{2U} \end{aligned}$$

und man erhält $U_1 = -M$, $U_2 = 0$ und $U_3 = a^2M - \frac{1}{3}M^3$. Es ist wie erwartet $Q = -a^2M$.

7.2.3. Berechnung bei $W \neq \rho$. Wie man sehen konnte, können aus den ersten drei Entwicklungskoeffizienten von U die Masse und das Quadrupolmoment berechnet werden.

Da in den verwendeten Versionen des AKM-Programms Koordinaten angewandt werden, in denen $W \neq \rho$ gewählt wurde, ist es notwendig, allgemein zu untersuchen, wie sich die Entwicklungskoeffizienten bei einer solchen Wahl der Koordinaten verändern.

7.2.3.1. Die allgemeine Koordinatentransformation. Gesucht ist die Transformation $(\rho' \neq W, \zeta') \rightarrow (\rho = W, \zeta)$ im Falle von Äquatorsymmetrie. Dazu lohnt sich der Blick auf die komplexe Darstellung der Koordinatentransformation. Es ist

$$z' = \rho' + i\zeta'$$

sowie

$$z(\rho', \zeta') = \rho(\rho', \zeta') + i\zeta(\rho', \zeta').$$

Im Aussenbereich soll z regulär sein. Das heisst, eine Entwicklung in eine Laurent-Reihe ist möglich

$$(7.2.12) \quad z = z' + c_0 + \frac{c_1}{z'} + \frac{c_2}{z'^2} + \dots$$

Weiterhin gilt

$$(7.2.13) \quad \begin{aligned} W(\rho', \zeta') \equiv \rho(\rho', \zeta') &= \Re z \\ &= \rho' + \Re c_0 + \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n e^{in\theta'}}{(ir')^n}, \end{aligned}$$

wobei verwendet wurde, dass $\rho' = r' \sin \theta'$, $\zeta' = r' \cos \theta'$ und folglich

$$\begin{aligned} z' &= \rho' + i\zeta' \\ &= r'(\sin \theta' + i \cos \theta') \\ &= ir' e^{-i\theta'} \end{aligned}$$

ist. Definiert man

$$(7.2.14) \quad \tilde{c}_n := \frac{c_n}{i^n},$$

so folgt unmittelbar

$$\begin{aligned} W &= \rho' + \Re c_0 + \Re \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{c}_n e^{in\theta'}}{r'^n} \\ &= \rho' + \Re c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r'^n} (\Re(\tilde{c}_n) \cos(n\theta') - \Im(\tilde{c}_n) \sin(n\theta')). \end{aligned}$$

Auf der Achse $\rho' = 0$ bzw. $\theta' \in \{0, \pi\}$ soll im Gültigkeitsbereich der Laurent-Reihe $\rho(0, \zeta') = 0$ gelten. Damit ist sofort klar, dass

$$\Re \tilde{c}_n = 0 \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Das heisst für die c_n nach Definition 7.2.14

$$(7.2.15) \quad c_n = i^n \cdot ia_n$$

mit reellen a_n . Mit Gleichung 7.2.13 hat W dann die allgemeine Gestalt

$$(7.2.16) \quad W = \rho' - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin(n\theta')}{r'^n}.$$

Ein Reihenansatz zeigt sofort, dass W in der Nähe der Achse die Gestalt

$$(7.2.17) \quad W = \rho' F_1(\zeta') + \rho'^3 F_3(\zeta') + \dots,$$

$$(7.2.18) \quad F_1(\zeta') = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot a_n}{\zeta'^{n+1}} \equiv B(0, \zeta')$$

besitzt und somit alle Ableitungen von W nach ζ' in $\rho' = 0$ verschwinden müssen³:

$$(7.2.19) \quad \left. \frac{\partial^n W}{\partial \zeta'^n} \right|_{\rho'=0} = 0 \quad \forall n \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Weiterhin gewinnt man aus Gleichung 7.2.18 die unbekanntenen a_n :

$$(7.2.20) \quad a_n = -\frac{B_{n+1}}{n}$$

für

$$(7.2.21) \quad B(0, \zeta') = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \zeta'^{-n}.$$

Zu dem selben Ergebnis gelangt man, wenn man die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für ρ und ζ verwendet.

7.2.3.2. *Äquatorsymmetrie.* Die Forderung nach Äquatorsymmetrie ist gleichbedeutend mit

$$W(r', \theta') \stackrel{!}{=} W(r', \pi - \theta').$$

Da nach den wohlbekanntenen Additionstheoremen

$$\begin{aligned} \sin(n(\pi - \theta')) &= \sin(n\pi) \cdot \cos(n\theta') - \sin(n\theta') \cdot \cos(n\pi) \\ &= (-1)^{n+1} \sin(n\theta') \end{aligned}$$

gilt, treten nur ungerade n in der Summe von Gleichung 7.2.16 auf. Das heisst $a_2 = a_4 = \dots = 0$ und somit

$$\begin{aligned} W &= \rho' - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n \sin(n\theta')}{r'^n} \\ &= \rho' - \frac{a_1 \sin \theta'}{r'} - \frac{a_3 \sin(3\theta')}{r'^3} - \dots \end{aligned}$$

Es soll der Vollständigkeit halber ζ nach Gleichung 7.2.12 betrachtet werden. Es ist analog zu W in r' und θ' mit den schon bekannten c_n aus Gleichung 7.2.15

$$\begin{aligned} \zeta &= \Im z \\ &= \zeta' + a_0 + \Im \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{ia_n e^{in\theta'}}{r'^n} \\ &= \zeta' + a_0 + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{a_n \cos(n\theta')}{r'^n}. \end{aligned}$$

Die Forderung, dass $\zeta(\rho', 0) = 0$ ist, übersetzt sich hier in $a_0 = 0$. So folgt mit Gleichung 7.2.20

$$(7.2.22) \quad \zeta = \zeta' - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{B_{n+1} \cos(n\theta')}{n \cdot r'^n}.$$

Wie man sieht, erfüllen die Koeffizienten die Forderung nach Äquatorsymmetrie mit $\zeta(r', \theta') \stackrel{!}{=} -\zeta(r', \pi - \theta')$, da $\cos(n(\pi - \theta')) = (-1)^n \cos(n\theta')$. Insbesondere ist ζ

³Dies folgt natürlich auch aus der Forderung $W(0, \zeta') = 0 \quad \forall \zeta'$.

auf der Achse

$$(7.2.23) \quad \zeta(0, \zeta') = \zeta' - \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n \cdot \zeta'^n}.$$

7.2.3.3. *Von u nach U .* Mit Hilfe von Gleichung 7.2.23 kann sofort ein Zusammenhang von den gesuchten Entwicklungskoeffizienten U_n zu denen in einem Koordinatensystem $W \neq \rho$ gegeben werden. Nach den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für ρ und ζ folgt nach Gleichung 7.2.17

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial \zeta'} &= -\frac{\partial \zeta}{\partial \rho'} \\ &= \rho' \partial_{\zeta'} F_1(\zeta') + \rho'^3 \partial_{\zeta'} F_3(\zeta') + \dots \end{aligned}$$

Damit ist offensichtlich, dass

$$\left. \frac{\partial \zeta}{\partial \rho'} \right|_{\rho'=0} = 0.$$

Das heisst, auf der Achse ist ζ eine Funktion von ζ' alleine. Damit entspricht eine Entwicklung in ζ' auf der Achse einer Entwicklung in ζ und folgender Ansatz ist gerechtfertigt:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} U_n \zeta^{-n}(\zeta') &= \sum_{n=1}^{\infty} U'_n \zeta'^{-n} \\ &= \frac{U_1}{\zeta'} + \frac{U_2}{\zeta'^2} + \frac{U_3 + B_2 U_1}{\zeta'^3} + \dots \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt sofort

$$(7.2.24) \quad \begin{aligned} U_1 &= U'_1, \\ U_2 &= U'_2, \\ U_3 &= U'_3 - B_2 U_1. \end{aligned}$$

Es ist nach Gleichung 7.2.1

$$e^{2U} = e^{2\nu} - \omega^2 W^2 e^{-2\nu}.$$

Da auf der Achse nach 7.2.19 alle Ableitungen von W nach ζ' verschwinden und $W(0, \zeta') = 0$ ist, gilt

$$(7.2.25) \quad U(0, \zeta') = \nu(0, \zeta').$$

Die Entwicklung von ν auf A^+ ist somit äquivalent zu der von U für die Berechnung der Momente. Im Programm wird das Potential u berechnet, das definiert wird durch

$$u := \nu - \log B.$$

Mit den Gleichungen 7.2.10, 7.2.21 und 7.2.25 ergibt sich in Äquatorsymmetrie

$$\begin{aligned} u(0, \zeta') &= U(0, \zeta') - \log B(0, \zeta') \\ &= \frac{U'_1}{\zeta'} - \frac{B_2}{\zeta'^2} + \frac{U'_3}{\zeta'^3} + O(\zeta'^{-4}). \end{aligned}$$

Setzt man Gleichung 7.2.24 in 7.2.11 ein, folgt mit $U'_1 = -M$

$$(7.2.26) \quad Q = -U'_3 - B_2 M - \frac{1}{3} M^3.$$

Für die Berechnung von Q sind damit alle wichtigen Konstanten, M , B_2 und U'_3 alleine aus der Entwicklung von u in $1/\zeta'$ bestimmbar.

7.2.4. Programminterne Koordinaten. In den beiden im Internet erhältlichen Versionen des AKM-Programms werden kompaktifizierte Koordinaten verwendet. Hier soll kurz darauf eingegangen werden, wie die entsprechenden Koordinaten auf der Symmetrieachse mit ζ' zusammenhängen und wie letztendlich die notwendigen Konstanten M , B_2 und U'_3 berechnet werden können.

7.2.4.1. *Spheroidale Version.* Der Entwicklung auf der Achse entspricht im Programm einer Entwicklung in s :

$$\begin{aligned} \sigma(s) &:= 1 + \frac{\sinh(\delta(s-1))}{\sinh(\delta)}, \\ \zeta'(s) &= r_p - r_e + \frac{r_e}{\sigma(s)}. \end{aligned}$$

Deshalb der Ansatz

$$(7.2.27) \quad \sum_{n=1}^{\infty} u'_n \zeta'(s)^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^s s^n$$

und es folgt nach Koeffizientenvergleich

$$\begin{aligned} -M \equiv u'_1 &= r_e \frac{\tanh(\delta)}{\delta} u_1^s, \\ -B_2 \equiv u'_2 &= (r_e - r_p)M - \frac{r_e}{2} \tanh^2(\delta) \cdot M + \left(r_e \frac{\tanh(\delta)}{\delta} \right)^2 u_2^s, \\ U'_3 \equiv u'_3 &= (r_e - r_p)^2 M - 2u'_2(r_e - r_p) + \frac{1}{6} r_e ((6r_p - 5r_e)M + 6u'_2) \tanh^2(\delta) \\ &\quad + \left(r_e \frac{\tanh(\delta)}{\delta} \right)^2 u_3^s. \end{aligned}$$

Achtet man in der Implementierung noch darauf, die $\tanh(\delta)/\delta$ -Terme im Grenzfall $\delta \rightarrow 0$ durch 1 zu ersetzen, um keine numerischen Probleme zu provozieren, steht der Berechnung des Quadrupolmoments für Spheroide nichts mehr im Weg.

7.2.4.2. *Toroidale Version.* Der Zusammenhang zu den Koordinaten auf der Achse ist in diesem Fall recht einfach, er stellt sich dar als

$$\zeta'(s) = \frac{\rho_0}{s}$$

und damit folgt mit dem selben Ansatz aus Gleichung 7.2.27 für die Koeffizienten der Entwicklung von u

$$u'_n = \rho_0^n \cdot u_n^s.$$

Die Masse $M = -\rho_0 u_1^s$, der Koeffizient $B_2 = -\rho_0^2 u_2^s$ und $U'_3 = \rho_0^3 u_3^s$ können so aus den ersten drei Ableitungen von u in $s = 0$ berechnet werden.

7.3. Tests der Berechnung

Bei der Arbeit mit numerischen Modellen ist es unbedingt notwendig, die Richtigkeit der Ergebnisse, so weit es geht, zu überprüfen. Es gibt die Möglichkeiten der Konvergenzanalyse bei Vergrößerung der numerischen Auflösung sowie ein Vergleich mit bekannten analytischen Resultaten. Die Konvergenz der AKM-Programme wird vorausgesetzt, da sie hinreichend oft untersucht wurde. Im Folgenden soll kurz dargestellt werden, wie die Berechnung des Quadrupolmomentes bei den verwendeten Versionen überprüft wurde.

7.3.1. Spheroidale Programmversionen. Es wurden zwei Versionen zur Berechnung spheroidaler Körper verwendet. Zum Einen eine arbeitsgruppeninterne Version, zum Anderen eine in der Online-Dokumentation erhältliche Version vom 15. Oktober 2008. Bei der erstgenannten wurden die Momente mit Hilfe eines Maple-Programms [Wat07] berechnet, das von David Petroff und Christian Teichmüller entwickelt wurde. Dieses basiert auf der direkten Berechnung der Entwicklung von ϕ in $1/\zeta$ nach Gleichung 5.1.3. Nach Unterabschnitt 7.2.3.2 zur Äquatorsymmetrie sind die m_n je rein reell oder imaginär. Dadurch ließ sich sehr gut beobachten, wie die Genauigkeit für höhere Momente nach dieser Methode nachlässt. Allgemein ist etwa ab dem fünften Moment keine sinnvolle Aussage mehr zu erwarten.

Die online verfügbare Version wurde nach den in diesem Kapitel vorgestellten Überlegungen erweitert. Eine Übereinstimmung der beiden so verfügbaren Berechnungen wurde bei einer relativen Abweichung von unter einem Prozent für das Quadrupolmoment festgestellt. Eine Unterscheidung beider Programmversionen erscheint damit nicht mehr notwendig und wird im Folgenden auch nicht mehr vorgenommen.

Die Kerr-Lösung ist außer im Falle des statischen Sterns für verschwindenden Drehimpuls in dieser Version nicht zu erreichen. Der erste Test bestand darin, diese Raumzeit nach [AP08] direkt in den Potentialen vorzugeben und das numerische mit dem analytischen Quadrupolmoment für festgehaltene M und J zu vergleichen. Bei einer Auflösung von zehn Tschebyscheff-Koeffizienten in allen Bereichen konnte bereits eine relative Genauigkeit von etwa 10^{-6} festgestellt werden. Weiterhin wurde im erreichbaren Limes des statischen Sterns ein Verschwinden des Quadrupolmoments beobachtet.

Der nichtrelativistische Grenzfall wurde anhand der homogenen Zustandsgleichung, die den bekannten Maclaurin'schen Ellipsoiden entspricht, untersucht. Auch

hier konnte eine Konvergenz festgestellt werden, jedoch war die erreichte relative Genauigkeit um etwa ein bis zwei Größenordnungen schlechter als im Vergleich mit der analytischen Kerr-Lösung bei gleicher Auflösung.

Mit der Übereinstimmung für verschiedene Programmversionen und den Vergleichen zu den analytischen Lösungen kann die Berechnung des Quadrupolmoments als richtig im Rahmen der angegebenen Fehler angesehen werden.

7.3.2. Toroidale Version. Bei dieser Implementierung steht sowohl die Kerr-Raumzeit als extremrelativistischer Grenzfall als auch der Newton'sche Limes dünner Ringe zur Verfügung. Anhand der Konvergenz dieser Lösungen kann somit die Berechnung des Quadrupolmoments überprüft werden.

Im Newton'schen ergibt sich wie in Abschnitt 6.3.2 für einen Ring mit äquatorialem Radius r_a , der gleich dem polaren r_p ist, dem Abstand R des Ringzentrums zur Symmetrieachse und der Gesamtmasse $M = \mu V$ das Quadrupolmoment

$$Q = -\frac{1}{2}M \left(R^2 + \frac{1}{4} \cdot r_a^2 \right)$$

$$\xrightarrow{r_a/R \rightarrow 0} -\frac{1}{2}MR^2.$$

Es ist daher im Grenzfall eines dünnen Rings interessant, die Größe

$$\frac{Q}{MR^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$$

für verschiedene Radienverhältnisse $A = \frac{r_p}{r_a}$ zu betrachten.

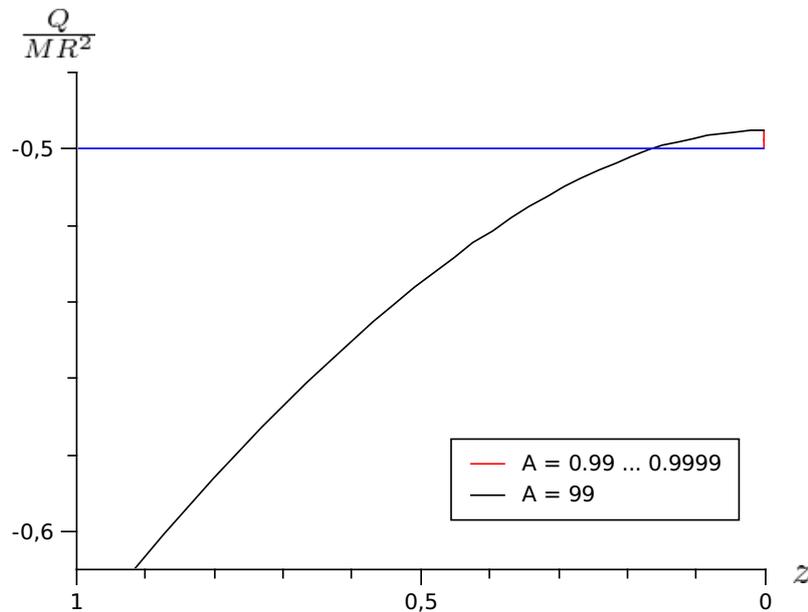


ABBILDUNG 7.3.1. Test der toroidalen Version: $\frac{Q}{MR^2} \rightarrow -\frac{1}{2}$ in Abhängigkeit von der Rotverschiebung z bei einem Radienverhältnis von 0.99 (schwarze Linie) und bei festem z bis zu einem Radienverhältnis von 0.9999 (rote Linie).

Die Konvergenz ist in Abbildung 7.3.1 dargestellt. Da die Berechnungen für $A \rightarrow 1$ aufwendiger werden, war es angebracht, zuerst mit $A = 0.99$ eine Newton'sche Situation herzustellen, um dann im Grenzfall gegen eins zu iterieren.

Die Konvergenz im extremrelativistischen Grenzfall bedeutet, dass das Quadrupolmoment gegen das entsprechende Kerr-Moment geht, also

$$\left| \frac{J^2}{MQ} \right| \rightarrow 1.$$

Da jedoch die gerichtete Annäherung dieses schon bekannten Verhältnisses gegen 1_- genau der Quadrupol-Vermutung entspricht, soll auf die Untersuchungen in Abschnitt 8.4 verwiesen werden. Dort kann man sich davon überzeugen, dass das Quadrupolmoment tatsächlich gegen das Kerr-Moment konvergiert.

Damit kann auch im Falle der toroidalen Programmversion von einer im Rahmen eines Fehlers von unter einem Prozent korrekten Berechnung des Quadrupolmoments ausgegangen werden.

Berechnungen

Mit Hilfe der theoretischen Vorüberlegungen konnte das Quadrupolmoment Q für spheroidale Körper unterschiedlicher Zustandsgleichungen und toroidale Körper mit homogener Zustandsgleichung untersucht werden. Da die beiden Erhaltungsgrößen M und J im Programm aus den Integraldarstellungen berechnet werden, reicht die zusätzliche Berechnung von Q zur Überprüfung der Quadrupol-Vermutung

$$\left| \frac{J^2}{MQ} \right| \leq 1.$$

Da bei spheroidalen Körpern im Grenzfall langsamer Rotation sowohl Drehimpuls als auch Quadrupolmoment gegen Null gehen, $J \rightarrow 0$ & $Q \rightarrow 0$, könnten numerisch Probleme auftreten¹. Es ist deshalb nachvollziehbar, für diese Körper die neue dimensionslose Größe Δm_2 folgendermaßen einzuführen:

$$\begin{aligned} \Delta m_2 &:= -\frac{1}{M^3} (m_2 - m_2^{\text{Kerr}}) \\ &= -\frac{1}{M^3} \left(Q + \frac{J^2}{M} \right). \end{aligned}$$

Die Vermutung ist damit unter der Voraussetzung $Q \leq 0$ mit der Ungleichung $\Delta m_2 \geq 0$ identisch. Die in den Abbildungen vorgestellten numerischen Ergebnisse sind als Beispiele zu betrachten. Die tatsächlich durchgeführten Rechnungen umfassten einen wesentlich größeren Parameterraum, um die Richtigkeit der Vermutung ausführlich zu testen.

Zur Berechnung der Größen in SI-Einheiten sei auf Anhang C verwiesen.

8.1. Sterne konstanter Dichte

Das wahrscheinlich einfachst mögliche Sternmodell ist das homogener Massendichte

$$\mu = \text{const.}$$

Man kann jedoch mit diesem sinnvolle Abschätzungen durchführen, wie etwa die Bestimmung von maximalen Massen, wie dies in [SA03, Sch03] geschehen ist. Darüber hinaus ist es möglich, es als erstes relativistisches Modell eines Neutronensterns zu betrachten, entsprechende hohe Dichte vorausgesetzt. Hier wurde diese Konfiguration untersucht, da sie im Newton'schen Limes den Maclaurin-Ellipsoiden aus Abschnitt 6.3.1 entsprechen.

¹Spätere Untersuchungen haben gezeigt, dass diese Vorsichtsmaßnahme eventuell nicht nötig ist, siehe die Anmerkungen in Abschnitt 6.2.

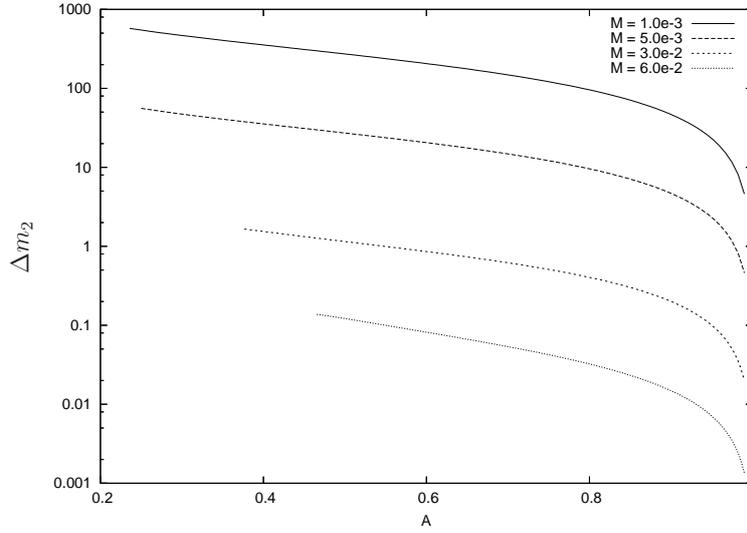


ABBILDUNG 8.1.1. Die Abweichung Δm_2 in Abhängigkeit vom Radienverhältnis A im Falle homogener Sterne bei variablen Massen.

Abbildung 8.1.1 zeigt, dass die Quadrupol-Vermutung zutrifft. Für die Rechnung wurde eine programminterne Massendichte von $\mu_{AKM} = 5.5$ verwendet. Dies muss beachtet werden, wenn man die Größen nach Anhang C in SI-Einheiten umrechnen will. Die Größe Δm_2 fällt mit dem Radienverhältnis A stetig und überschreitet viele Größenordnungen. Für große Massen wird die Abweichung geringer, bleibt dabei aber immer positiv.

8.2. Vollständig degeneriertes, ideales Neutronengas

Neutronensterne stellen extrem kompakte astrophysikalische Objekte am Ende der Sternentwicklung dar. Zwar sind die inneren Vorgänge noch nicht geklärt, man kann jedoch das Modell eines vollständig entarteten Neutronengases ansetzen. Dies ist durch die Tatsache gerechtfertigt, dass die zu erwartende Temperatur weit unter der Fermitemperatur des Sterns liegt, siehe [ST83]. Die allgemeine Zustandsgleichung wurde bereits 1932 im Rahmen einer speziell-relativistischen Fermi-Dirac-Statistik durch Stoner [Sto32] berechnet. Der Druck, die Massendichte und die baryonische Massendichte hängen dann nach [MAK⁺08] wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{m_n^4}{24\pi^2\hbar^3} f(x), \\
 \mu &= \mu_B + \frac{m_n^4}{24\pi^2\hbar^3} g(x), \\
 \mu_B &= \frac{m_n^4}{24\pi^2\hbar^3} x^3
 \end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} f(x) &= x(2x^2 - 3)\sqrt{x^2 + 1} + 3\text{arsinh}x, \\ g(x) &= 8x^3 \left[\sqrt{x^2 + 1} - 1 \right] - f(x), \end{aligned}$$

wobei m_n die Neutronenmasse und \hbar das Plancksche Wirkungsquantum sind.

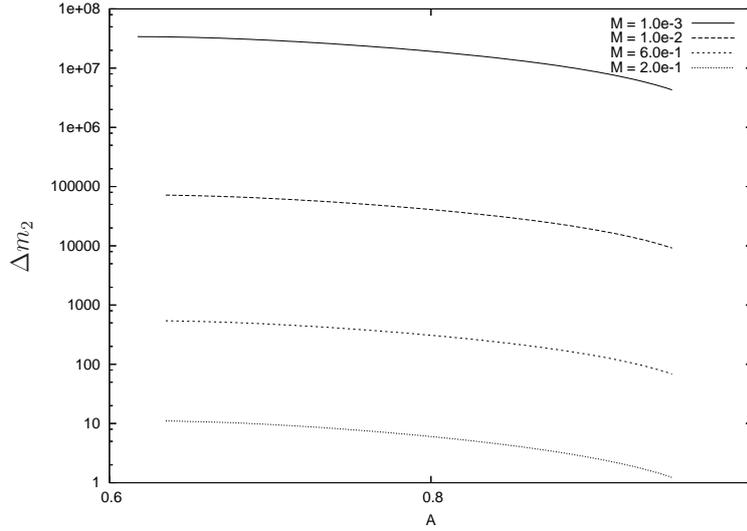


ABBILDUNG 8.2.1. Die Abweichung Δm_2 , dargestellt für ein Modell vollständig degenerierten Neutronengases in Abhängigkeit vom Radienverhältnis A .

Abbildung 8.2.1 zeigt, dass die Quadrupol-Vermutung zutrifft.

8.3. Quarksterne nach dem MIT-Bag-Modell

Quarksterne stellen eine noch höher komprimierte Materieform als Neutronensterne dar, wurden jedoch noch nicht beobachtet. Selbst wenn ihre Existenz spekulativ ist, kann es möglich sein, dass diese Form der Materie im Inneren von Neutronensternen vorliegt. Die nach dem MIT-Bag-Modell [CJJ⁺74] resultierende Zustandsgleichung

$$(8.3.1) \quad \mu = \alpha p + 4B$$

ist relativ einfach. Teichmüller hat sich in seiner Diplomarbeit [Tei07] ausführlich mit den Eigenschaften von Quarksternen nach diesem Modell beschäftigt. Er weist darauf hin, dass der Parameter B , der einer Grundenergiedichte entspricht und in diesem Modell einen charakteristischen Wert von $B_{ch} = 60 \text{ MeV}/fm^3$ besitzt, in Bezug auf die Berechnung eines Quarksterns nur eine Skalierungseigenschaft auf die Masse in entsprechenden Einheiten hat. Dies zeigt er im Falle eines kugelsymmetrischen TOV-Sterns nach [OV39]. Weiterhin führt er aus, dass der Parameter α in Berechnungen zur Quantenchromodynamik auf einen Bereich zwischen 2 und 3,5 bestimmt worden sei. Die von ihm durchgeführten Rechnungen zeigen, dass beide

Parameter einen Einfluß, etwa auf die zu erwartende Masse-Radius-Relation des Sterns haben, jedoch keine grundsätzlich verschiedenen physikalischen Eigenschaften hervorrufen.

Hier wurden die Rechnungen zu Quarksternen mit der Zustandsgleichung

$$\mu = 3p + 4B_{ch}$$

durchgeführt.

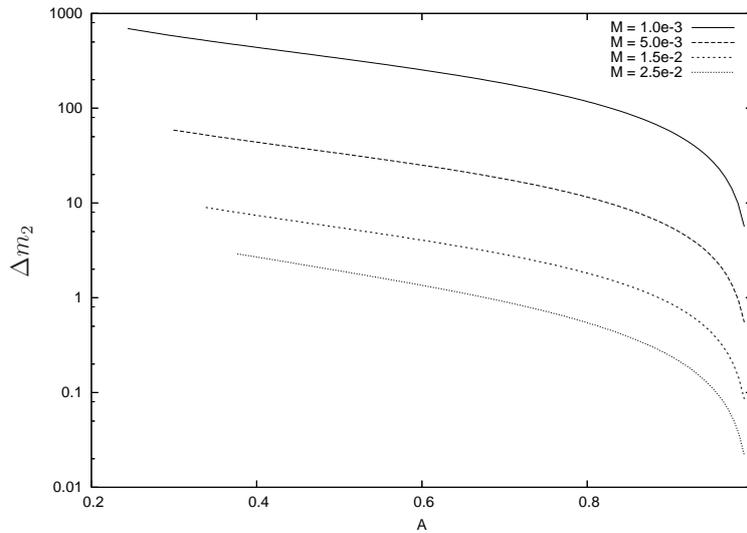


ABBILDUNG 8.3.1. Auch für Quarksterne nach dem MIT-Bag-Modell ist die Abweichung $\Delta m_2 \geq 0$ in Abhängigkeit vom Radiusverhältnis.

Abbildung 8.3.1 zeigt wiederum die Bestätigung der Quadrupol-Vermutung unter diesen Voraussetzungen.

8.4. Homogene Ringkörper

Neben schwarzen Löchern, spheroidalen Sternen und flachen Scheiben sind Ringe und die Kombination dieser Grundkörper wahrscheinlich die relevantesten astrophysikalischen Objekte. Es ist daher nachvollziehbar, warum die Tests zur Überprüfung der Quadrupol-Vermutung auch Ringkörper enthalten sollten.

Die Untersuchungen zu spheroidalen Körpern haben für unterschiedliche Zustandsgleichungen keine grundsätzlich abweichenden Ergebnisse geliefert. Deshalb soll hier stellvertretend nur die Untersuchung für homogene Ringkörper angegeben werden.

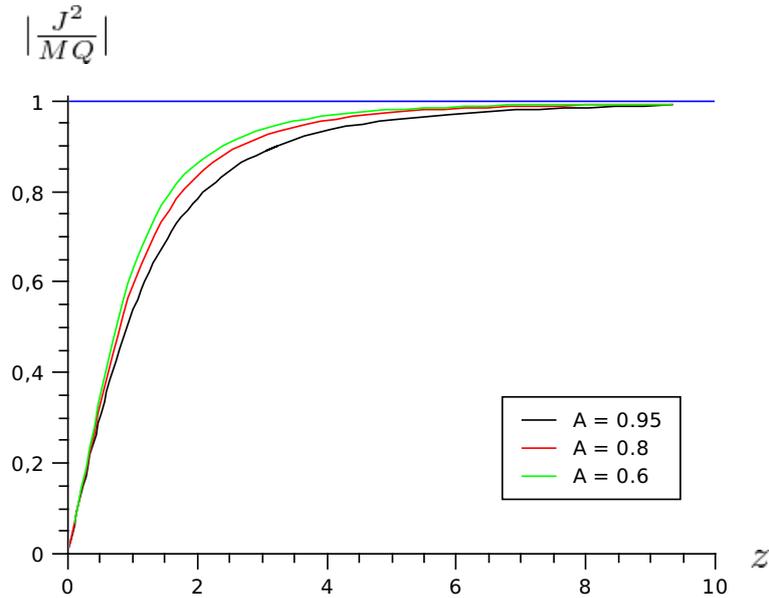


ABBILDUNG 8.4.1. Das Verhältnis $\left|\frac{J^2}{MQ}\right|$ für homogene Toroide in Abhängigkeit von der Rotverschiebung z bei unterschiedlichen Radienverhältnissen A .

Abbildung 8.4.1 zeigt, dass auch in diesem Fall die Vermutung zuzutreffen scheint.

Da das Verhältnis $\left|\frac{J^2}{MQ}\right|$ im extremrelativistischen Grenzfall wie erwartet gegen eins konvergiert, kann die Untersuchung auch als zusätzliche Bestätigung der Berechnung des Quadrupolmoments angesehen werden.

Zusammenfassung der Ergebnisse

Es konnte gezeigt werden, dass für die betrachteten Körper unter den gegebenen Voraussetzungen die Quadrupol-Vermutung zutrifft. Das Zutreffen der Vermutung scheint dabei unabhängig zu sein von der Wahl der Zustandsgleichung. Auch eine Veränderung der Topologie von Scheiben zu sphärischen Körper und Ringen hat keine Verletzung der Vermutung ergeben.

Wahrscheinlich handelt es sich tatsächlich um eine neue interessante Eigenschaft von axialsymmetrisch stationären und starr rotierenden Flüssigkeitskörpern in der allgemeinen Relativitätstheorie.

Ausblick

In der vorliegenden Arbeit ist es gelungen, die stationären Multipolmomente in der allgemeinen Relativitätstheorie als natürliche Verallgemeinerung des Newton'schen Begriffs darzustellen und, darauf aufbauend, den Algorithmus zur Bestimmung der Momente im axialsymmetrischen Fall nach Fodor et al. zu bestätigen sowie die Ergebnisse zu ergänzen. Darüber hinaus konnte die Quadrupol-Vermutung für axialsymmetrisch starr rotierende Flüssigkeitskörper aufgestellt und anhand von analytischen und numerischen Ergebnissen unterlegt werden.

Die wesentliche Innovation an dem durch Fodor aufgestellten Algorithmus besteht in der Einführung der Tensoren $S_{a b c}$, die den Rechenaufwand der Bestimmung der Momente anhand des Potentials ϕ wesentlich verringern. Dies war jedoch durch die Axialsymmetrie möglich und es ist daher fraglich, ob für allgemeinere Raumzeiten eine Übertragung der Ideen möglich ist.

Ein derzeitiger Schwerpunkt der Forschungen in der allgemeinen Relativitätstheorie ist die Simulation dynamischer Prozesse. Man erhofft sich aus der Analyse dieser Systeme Vorhersagen über die zu erwartende Form der emittierten Gravitationswellen zu gewinnen. Thorne gab in [Tho80] Entwicklungen der Gravitationsstrahlung im Sinne von nicht-stationären Multipolmomenten. Aber auch aus den in dieser Arbeit behandelten Momenten können für dynamische Situationen Rückschlüsse gezogen werden. Ryan etwa hat sich in [Rya95] und vielen folgenden Artikeln ausführlich mit der Gravitationsstrahlung eines Testobjekts vor dem Hintergrund axialsymmetrisch stationärer Raumzeiten anhand ihrer Momente beschäftigt, was später durch Sotiriou und Apostolatos in [SA06] auf Einstein-Maxwell-Raumzeiten verallgemeinert wurde. Auch könnte ein kontinuierlicher parametrischer Übergang stationärer Raumzeiten ein Modell für dynamische Prozesse darstellen, der Rückschlüsse auf die Abstrahlung des Systems zulässt.

Darüber hinaus besteht die interessante Möglichkeit, numerisch gewonnene Außenlösungen mit exakten Lösungen zu approximieren. Manko und Ruiz haben in [MR98] gezeigt, wie aus Vorgabe der ersten n Momente ein rationales Ernst-Potential auf der Achse bestimmt werden kann, das nur in höheren Momenten von der Vorgabe abweicht. In der Diplomarbeit von Maucher [Mau09] wird gezeigt, wie aus diesem die Lösung im gesamten Raum konstruiert werden kann.

Es ist auch denkbar, aus der Vorgabe einer Zahl von Multipolen Anfangsdaten für Außenfelder numerischer Simulationen zu erzeugen. Welche Wahl an Momenten macht dann physikalisch Sinn? Ungleichungen, die den möglichen Parameterraum

einschränken, sind bei der Wahl der Momente sehr nützlich. Die in dieser Arbeit aufgestellte Vermutung ist eine solche Ungleichung.

Die Kerr-Raumzeit stellt eine extreme physikalische Situation dar. Dies gilt nicht automatisch auch für alle ihre Momente. Der dritte Teil dieser Arbeit stellt den Anfang von Untersuchungen dar, die eben dies für axialsymmetrisch stationäre Raumzeiten mit einem starr rotierenden Flüssigkeitskörper herausstellen könnten. Erste Tests an spheroidalen Körpern haben gezeigt, dass eventuell auch für das Oktupolmoment $|Q_3^{\text{Kerr}}| \leq |Q_3|$ gelten könnte. Im Falle der starr rotierenden Staubscheibe ist in Abbildung 8.4.2 das Verhältnis $|Q_n^{\text{Kerr}}/Q_n|$ bis $n = 10$ angegeben. Es wurde berechnet nach den in [MAK⁺08] gegebenen Momenten und bleibt immer kleiner gleich eins.

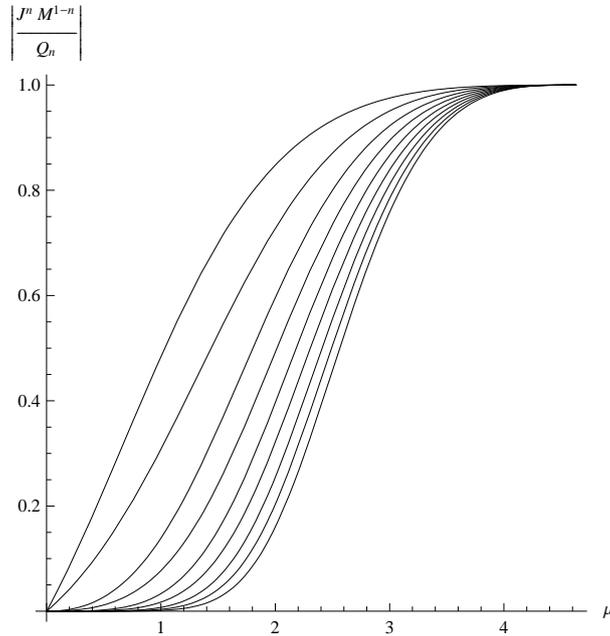


ABBILDUNG 8.4.2. Das Verhältnis $V_n = |J^n M^{1-n}/Q_n|$ der starr rotierenden Staubscheibe für $n = 2 \dots 10$: $V_{10} \leq \dots \leq V_3 \leq V_2 \leq 1$.

Deshalb wird folgende Vermutung aufgestellt:

VERALLGEMEINERTE QUADRUPOLE-VERMUTUNG. *Seien die Voraussetzungen wie in der Quadrupol-Vermutung. Dann gilt für $n \geq 2$:*

$$\left| \frac{J^n}{M^{n-1} \cdot Q_n} \right| \leq 1.$$

Wie ist die verallgemeinerte Quadrupol-Vermutung zu interpretieren? Eventuell als Verhältnis zwischen Strömen und Massen? Ist die Vermutung äquivalent zu $v \leq 1$ oder folgt sie daraus? Warum sollte die Vermutung nicht auch für eine größere Klasse von Rotationsgesetzen gelten?

Ein analytischer Beweis der Quadrupol-Vermutung(en) könnte zum grundlegenden Verständnis der allgemeinen Relativitätstheorie beitragen.

Danksagung

Viele Menschen haben mich dabei unterstützt, mein Studium mit dieser Arbeit zu einem erfolgreichen Ende zu bringen, allen voran natürlich meine Familie. Jedem, der mir etwas direkt oder indirekt durch ein nettes Wort, eine gemeinsame Rechnung oder eine Tasse Kakao mitgegeben hat, möchte ich an dieser Stelle herzlich danken. Man ist allzu oft geneigt zu vergessen, wie viel andere Menschen die Voraussetzung sind für das eigene Vorankommen. Es wird nicht möglich sein, hier alle Menschen zu nennen, die mir im letzten Jahr geholfen haben. Trotzdem möchte ich einige von ihnen hier aufführen, die mich speziell bei dieser Arbeit unterstützt haben.

Ich bedanke mich bei Prof. Reinhard Meinel für seine sowohl fachliche als auch menschliche Unterstützung. Ohne sein Verständnis wäre die Arbeit nicht zu Stande gekommen. Herr Meinel stand mir über die gesamte Zeit der Arbeit hilfreich und geduldig zur Seite.

Gleiches gilt für Dr. Andreas Kleinwächter, der mir bei den Betrachtungen zur Staubscheibe sehr geholfen hat.

Vielen Dank auch an Dr. Marcus Ansorg, der mir kurzfristig die Möglichkeit gegeben hat, als Gast in Potsdam am Albert-Einstein-Institut zu arbeiten. Er betreute mich in Potsdam und war mir bei vielen Problemen eine große Hilfe. Danke auch an Dr. Jörg Hennig, der viele Fragen stets zuvorkommend beantwortete. Die gemeinsame Zeit in Raum 1.65 wird mir stets in schöner Erinnerung bleiben.

Dr. David Petroff danke ich für seine Hilfe bei vielen Fragestellungen zum AKM-Programm und seiner Dissertation.

Vielen Dank auch an Stefan Horatschek, mit dessen Hilfe ich Berechnungen zu dünnen Ringen durchgeführt habe.

Dass Menschen anderen Menschen uneigennützig helfen, ohne sie je gesehen zu haben, konnte ich bei Thomas P. Sotiriou und Thomas Bäckdahl beobachten. Bei Problemen der Berechnung der Momente nach Fodor halfen mir beide bereitwillig.

Andrés Aceña danke ich für seine Einführung in den Spinor-Formalismus.

Die meiste Zeit am TPI verbrachte ich in einem Zimmer gemeinsam mit Jan Zschoche. Ihm danke ich für viele fruchtbare Diskussionen, jede Menge Kuchen und die Durchsicht des Manuskripts. Auch an Wilm Schumacher vielen Dank für das Korrekturlesen.

Anhang

Explizite Multipolmomente

Mit $M_{ij} := m_i m_j - m_{i-1} m_{j+1}$ folgt für die höheren Momente in vollständiger Übereinstimmung mit [FHP89]

$$\begin{aligned}
 Q_5^{\text{Fod}} &= m_5 - \frac{1}{21} M_{20} \bar{m}_1 - \frac{1}{3} M_{30} \bar{m}_0, \\
 Q_6^{\text{Fod}} &= m_6 + \frac{1}{33} M_{20} \bar{m}_0^2 m_0 - \frac{5}{231} M_{20} \bar{m}_2 - \frac{4}{33} M_{30} \bar{m}_1 - \frac{8}{33} M_{31} \bar{m}_0 - \frac{6}{11} M_{40} \bar{m}_0, \\
 Q_7^{\text{Fod}} &= m_7 - \frac{3}{143} M_{20} \bar{m}_0^2 m_1 + \frac{10}{429} M_{20} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_0 - \frac{5}{429} M_{20} \bar{m}_3 + \frac{15}{143} M_{30} \bar{m}_0^2 m_0 \\
 &\quad - \frac{25}{429} M_{30} \bar{m}_2 - \frac{4}{39} M_{31} \bar{m}_1 - \frac{30}{143} M_{40} \bar{m}_1 - \frac{76}{143} M_{41} \bar{m}_0 - \frac{10}{13} M_{50} \bar{m}_0, \\
 Q_8^{\text{Fod}} &= m_8 - \frac{1}{143} M_{20} \bar{m}_0^3 m_0^2 + \frac{1}{11} M_{20} \bar{m}_0^2 m_2 - \frac{2}{143} M_{20} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_1 + \frac{38}{3003} M_{20} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_2 \\
 &\quad + \frac{1}{273} M_{20} \bar{m}_1^2 m_0 - \frac{1}{143} M_{20} \bar{m}_4 - \frac{24}{143} M_{30} \bar{m}_0^2 m_1 + \frac{12}{143} M_{30} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_0 \\
 &\quad - \frac{14}{429} M_{30} \bar{m}_3 + \frac{3}{13} M_{31} \bar{m}_0^2 m_0 - \frac{23}{429} M_{31} \bar{m}_2 + \frac{3}{13} M_{40} \bar{m}_0^2 m_0 - \frac{15}{143} M_{40} \bar{m}_2 \\
 &\quad - \frac{34}{143} M_{41} \bar{m}_1 - \frac{4}{13} M_{50} \bar{m}_1 - \frac{45}{143} M_{42} \bar{m}_0 - \frac{11}{13} M_{51} \bar{m}_0 - M_{60} \bar{m}_0, \\
 Q_9^{\text{Fod}} &= m_9 - \frac{1}{221} M_{20} m_3 \bar{m}_0^2 - \frac{1}{221} M_{20} \bar{m}_5 + \frac{2}{221} M_{20} \bar{m}_0^3 m_0 m_1 - \frac{21}{2431} M_{20} \bar{m}_0^2 \bar{m}_1 m_0^2 \\
 &\quad + \frac{174}{2431} M_{20} \bar{m}_0 m_2 \bar{m}_1 + \frac{20}{2431} M_{20} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_3 - \frac{106}{17017} M_{20} \bar{m}_0 \bar{m}_2 m_1 \\
 &\quad - \frac{41}{17017} M_{20} \bar{m}_1^2 m_1 + \frac{8}{2431} M_{20} \bar{m}_1 m_0 \bar{m}_2 - \frac{7}{221} M_{30} \bar{m}_0^3 m_0^2 \\
 &\quad - \frac{18}{143} M_{30} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_1 + \frac{112}{2431} M_{30} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_2 + \frac{35}{2431} M_{30} \bar{m}_1^2 m_0 \\
 &\quad - \frac{49}{2431} M_{30} \bar{m}_4 - \frac{24}{221} M_{31} \bar{m}_0^2 m_1 + \frac{42}{221} M_{31} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_0 - \frac{7}{221} M_{31} \bar{m}_3 \\
 &\quad - \frac{38}{221} M_{40} \bar{m}_0^2 m_1 + \frac{42}{221} M_{40} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_0 - \frac{147}{2431} M_{40} \bar{m}_3 + \frac{7}{17} M_{41} \bar{m}_0^2 m_0 \\
 &\quad - \frac{314}{2431} M_{41} \bar{m}_2 + \frac{7}{17} M_{50} \bar{m}_0^2 m_0 - \frac{35}{221} M_{50} \bar{m}_2 - \frac{373}{2431} M_{42} \bar{m}_1 - \frac{87}{221} M_{51} \bar{m}_1 \\
 &\quad - \frac{7}{17} M_{60} \bar{m}_1 - \frac{148}{221} M_{52} \bar{m}_0 - \frac{20}{17} M_{61} \bar{m}_0 - \frac{21}{17} M_{70} \bar{m}_0,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{10}^{\text{Fod}} = & m_{10} - \frac{70}{4199} M_{20} m_3 \bar{m}_0 \bar{m}_1 - \frac{63}{323} M_{30} m_3 \bar{m}_0^2 - \frac{56}{4199} M_{30} \bar{m}_5 \\
& - \frac{1}{323} M_{20} \bar{m}_6 - \frac{112}{4199} M_{20} m_2 m_0 \bar{m}_0^3 + \frac{7}{4199} M_{20} \bar{m}_0^4 m_0^3 \\
& - \frac{13}{4199} M_{20} \bar{m}_0^3 m_1^2 + \frac{42}{4199} M_{20} \bar{m}_0^2 \bar{m}_1 m_0 m_1 - \frac{727}{138567} M_{20} \bar{m}_0^2 m_0^2 \bar{m}_2 \\
& + \frac{38222}{969969} M_{20} \bar{m}_0 m_2 \bar{m}_2 - \frac{37}{12597} M_{20} \bar{m}_0 \bar{m}_1^2 m_0^2 + \frac{274}{46189} M_{20} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_4 \\
& - \frac{146}{46189} M_{20} \bar{m}_0 m_1 \bar{m}_3 + \frac{683}{57057} M_{20} m_2 \bar{m}_1^2 + \frac{262}{138567} M_{20} \bar{m}_1 m_0 \bar{m}_3 \\
& - \frac{106}{46189} M_{20} \bar{m}_1 \bar{m}_2 m_1 + \frac{71}{138567} M_{20} m_0 \bar{m}_2^2 + \frac{294}{4199} M_{30} \bar{m}_0^3 m_0 m_1 \\
& - \frac{168}{4199} M_{30} \bar{m}_0^2 \bar{m}_1 m_0^2 + \frac{4144}{138567} M_{30} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_3 - \frac{8960}{138567} M_{30} \bar{m}_0 \bar{m}_2 m_1 \\
& - \frac{3010}{138567} M_{30} \bar{m}_1^2 m_1 + \frac{112}{8151} M_{30} \bar{m}_1 m_0 \bar{m}_2 - \frac{28}{323} M_{31} \bar{m}_0^3 m_0^2 \\
& - \frac{264}{4199} M_{31} \bar{m}_0^2 m_2 - \frac{348}{4199} M_{31} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_1 + \frac{4872}{46189} M_{31} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_2 \\
& + \frac{84}{2431} M_{31} \bar{m}_1^2 m_0 - \frac{938}{46189} M_{31} \bar{m}_4 - \frac{28}{323} M_{40} \bar{m}_0^3 m_0^2 \\
& - \frac{28}{247} M_{40} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_1 + \frac{4872}{46189} M_{40} \bar{m}_0 m_0 \bar{m}_2 + \frac{84}{2431} M_{40} \bar{m}_1^2 m_0 \\
& - \frac{1764}{46189} M_{40} \bar{m}_4 - \frac{321}{4199} M_{41} \bar{m}_0^2 m_1 + \frac{112}{323} M_{41} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_0 - \frac{3626}{46189} M_{41} \bar{m}_3 \\
& - \frac{42}{323} M_{50} \bar{m}_0^2 m_1 + \frac{112}{323} M_{50} \bar{m}_0 \bar{m}_1 m_0 - \frac{392}{4199} M_{50} \bar{m}_3 + \frac{498}{4199} M_{42} \bar{m}_0^2 m_0 \\
& - \frac{239}{2717} M_{42} \bar{m}_2 + \frac{210}{323} M_{51} \bar{m}_0^2 m_0 - \frac{924}{4199} M_{51} \bar{m}_2 + \frac{210}{323} M_{60} \bar{m}_0^2 m_0 \\
& - \frac{70}{323} M_{60} \bar{m}_2 - \frac{1426}{4199} M_{52} \bar{m}_1 - \frac{182}{323} M_{61} \bar{m}_1 - \frac{168}{323} M_{70} \bar{m}_1 - \frac{1553}{4199} M_{53} \bar{m}_0 \\
& - \frac{339}{323} M_{62} \bar{m}_0 - \frac{490}{323} M_{71} \bar{m}_0 - \frac{28}{19} M_{80} \bar{m}_0.
\end{aligned}$$

Das elfte Moment Q_{11}^{Fod} wurde neu berechnet als

$$\begin{aligned}
Q_{11}^{\text{Fod}} = & m_{11} - \frac{248}{133}M_{81}\bar{m}_0 - \frac{12}{7}M_{90}\bar{m}_0 - \frac{250}{323}M_{63}\bar{m}_0 - \frac{467}{323}M_{72}\bar{m}_0 \\
& - \frac{49}{247}M_{53}\bar{m}_1 - \frac{177}{323}M_{62}\bar{m}_1 - \frac{240}{323}M_{71}\bar{m}_1 - \frac{12}{19}M_{80}\bar{m}_1 \\
& - \frac{841}{4199}M_{52}\bar{m}_2 - \frac{104}{323}M_{61}\bar{m}_2 - \frac{90}{323}M_{70}\bar{m}_2 \\
& - \frac{233}{4199}M_{42}\bar{m}_3 - \frac{42}{323}M_{60}\bar{m}_3 - \frac{574}{4199}M_{51}\bar{m}_3 \\
& - \frac{216}{4199}M_{41}\bar{m}_4 - \frac{252}{4199}\bar{m}_4M_{50} - \frac{58}{4199}M_{31}\bar{m}_5 - \frac{108}{4199}M_{40}\bar{m}_5 \\
& - \frac{3}{323}M_{30}\bar{m}_6 - \frac{5}{2261}M_{20}\bar{m}_7 \\
& - \frac{480}{2261}M_{31}\bar{m}_0^2m_3 + \frac{69}{323}M_{42}\bar{m}_0^2m_1 - \frac{10}{19}M_{40}\bar{m}_0^2m_3 + \frac{5}{119}M_{51}\bar{m}_0^2m_1 \\
& + \frac{654}{2261}M_{52}\bar{m}_0^2m_0 + \frac{294}{323}M_{61}\bar{m}_0^2m_0 + \frac{18}{19}M_{70}\bar{m}_0^2m_0 \\
& + \frac{12}{247}M_{41}\bar{m}_1^2 + \frac{276}{4199}M_{50}\bar{m}_1^2m_0 + \frac{737}{88179}M_{31}\bar{m}_1^2m_1 - \frac{710}{29393}M_{30}\bar{m}_1^2m_2 \\
& + \frac{180}{323}M_{60}\bar{m}_0\bar{m}_1m_0 + \frac{164}{323}M_{51}\bar{m}_0\bar{m}_1m_0 - \frac{1608}{29393}M_{31}\bar{m}_0\bar{m}_1\bar{m}_2 \\
& - \frac{8472}{29393}M_{30}\bar{m}_0\bar{m}_1m_3 + \frac{1062}{29393}M_{41}\bar{m}_0\bar{m}_1m_1 + \frac{1192}{29393}M_{40}\bar{m}_0\bar{m}_1m_2 \\
& - \frac{55}{88179}M_{20}\bar{m}_2^2m_1 + \frac{11}{4199}M_{30}\bar{m}_2^2m_0 + \frac{1930}{88179}M_{31}\bar{m}_0\bar{m}_2m_1 \\
& + \frac{600}{4199}M_{41}\bar{m}_0\bar{m}_2m_0 - \frac{1838}{29393}M_{30}\bar{m}_0\bar{m}_2m_2 + \frac{48}{247}M_{50}\bar{m}_0\bar{m}_2m_0 \\
& + \frac{144}{4199}M_{40}\bar{m}_1\bar{m}_2m_0 - \frac{838}{88179}M_{20}\bar{m}_1\bar{m}_2m_2 + \frac{10}{741}M_{31}\bar{m}_1\bar{m}_2m_0 \\
& - \frac{62}{4641}M_{20}\bar{m}_0\bar{m}_3m_2 + \frac{370}{12597}M_{31}\bar{m}_0\bar{m}_3m_0 + \frac{288}{4199}M_{40}\bar{m}_0\bar{m}_3m_0 \\
& - \frac{110}{88179}M_{20}\bar{m}_1\bar{m}_3m_1 + \frac{2}{247}M_{30}\bar{m}_1\bar{m}_3m_0 + \frac{10}{29393}M_{20}\bar{m}_2\bar{m}_3m_0 \\
& - \frac{50}{29393}M_{20}\bar{m}_0\bar{m}_4m_1 + \frac{90}{4199}M_{30}\bar{m}_0\bar{m}_4m_0 + \frac{2}{1547}M_{20}\bar{m}_1\bar{m}_4m_0 \\
& + \frac{134}{29393}M_{20}\bar{m}_0\bar{m}_5m_0 - \frac{28}{323}M_{20}\bar{m}_0^3m_1m_2 + \frac{72}{323}M_{20}\bar{m}_0^3m_0m_3 \\
& + \frac{23}{323}M_{30}\bar{m}_0^3m_1^2 - \frac{32}{323}M_{40}\bar{m}_0^3m_0m_1 - \frac{60}{323}M_{50}\bar{m}_0^3m_0^2 - \frac{1}{323}M_{20}\bar{m}_0^2\bar{m}_1m_1^2 \\
& - \frac{120}{4199}M_{30}\bar{m}_0^2\bar{m}_1m_0m_1 - \frac{9}{29393}M_{20}\bar{m}_1^3m_0^2 + \frac{328}{4199}M_{20}\bar{m}_0^2\bar{m}_1m_0m_2 \\
& - \frac{61}{4199}M_{30}\bar{m}_0\bar{m}_1^2m_0^2 + \frac{310}{88179}M_{20}\bar{m}_0\bar{m}_1^2m_0m_1 - \frac{36}{323}M_{40}\bar{m}_0^2\bar{m}_1m_0^2 \\
& + \frac{446}{88179}M_{20}\bar{m}_0^2\bar{m}_2m_0m_1 - \frac{86}{29393}M_{20}\bar{m}_0\bar{m}_1\bar{m}_2m_0^2 - \frac{101}{4199}M_{30}\bar{m}_0^2\bar{m}_2m_0^2 \\
& - \frac{115}{29393}M_{20}\bar{m}_0^2\bar{m}_3m_0^2 + \frac{3}{323}M_{30}\bar{m}_0^4m_0^3 - \frac{1}{323}M_{20}\bar{m}_0^4m_0^2m_1 + \frac{12}{4199}M_{20}\bar{m}_0^3\bar{m}_1m_0^3.
\end{aligned}$$

Formeln zur starr rotierenden Staubscheibe

Die Metrik der starr rotierenden Staubscheibe ist in ultraelliptischen Theta-Funktionen gegeben. Diese Lösung kann in der Symmetrieebene und auf der Rotationsachse mit Hilfe gewöhnlicher Theta-Funktionen beziehungsweise mit Jacobi'schen elliptischen Funktionen dargestellt werden. Dies gelingt in der Scheibe in einer besonders einfachen Form mit den Parameterfunktionen $e^{2V_0}(\mu)$ und $b_0(\mu)$, wobei $f_0(\mu) = e^{2V_0}(\mu) + ib_0(\mu)$ das Ernst-Potential im Nullpunkt ist. Eine weitere wichtige Parameterfunktion ist $\Omega\rho_0(\mu)$ mit der Winkelgeschwindigkeit Ω und dem Scheibenradius ρ_0 . Diese Funktionen sind durch die Relation

$$e^{4V_0} + b_0^2 + 4\Omega^2\rho_0^2 = 1$$

verknüpft.

Die Darstellung auf der Achse ist komplizierter. Bei der Entwicklung des Potentials auf A^+ treten daher weitere Parameterfunktionen, die $c_1(\mu)$, $c_3(\mu)$, $c_5(\mu)$ usw. genannt werden sollen, auf. Die Multipolmomente werden daher auch von diesen Funktionen abhängen. Die vollständige Lösung, ihre Herleitung sowie höhere Multipolmomente können in [MAK⁺08] nachgeschlagen werden.

Sind

$$\begin{aligned} e^{2V_0}(\mu) &= \frac{h'(\mu)}{h(\mu)} \operatorname{cn}^2 \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right], \\ b_0(\mu) &= -\frac{1}{h(\mu)} \operatorname{sn} \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right] \cdot \operatorname{dn} \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right], \\ \Omega_0 \equiv \Omega\rho_0(\mu) &= \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{h'^2(\mu)}{h^2(\mu)}} \operatorname{cn} \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right] \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} c_1(\mu) &:= 2E\tau + \frac{1}{\sqrt{\mu}} (-\mu(1 + \tau^2)I_0 + I_1), \\ c_3(\mu) &:= \frac{1}{3\mu^{3/2}} \left(-2E\mu^{3/2}\tau + \mu^{3/2} \operatorname{sn} \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right] \cdot \operatorname{cn} \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right] \cdot \right. \\ &\quad \left. \operatorname{dn} \left[\hat{I}(\mu), h'(\mu) \right] (\tau - \tau^3) + \mu^2\tau^2(1 + \tau^2)I_0 - 3\mu I_1 + 3I_2 \right), \end{aligned}$$

dann sind wie in Abschnitt 6.3.3 die ersten drei Multipolmomente gegeben durch

$$\begin{aligned} 2\Omega \cdot M &= -b_0 - \Omega_0 c_1, \\ 4\Omega^2 \cdot J &= -b_0 - 2\Omega_0 c_1, \\ 8\Omega^3 \cdot Q &= b_0 + (2 + b_0^2)\Omega_0 c_1 + b_0\Omega_0^2 c_1^2 + (\Omega_0^3(c_1^3 - 12c_3))/3. \end{aligned}$$

Hierbei wurden folgende Definitionen verwendet:

$$\begin{aligned} E(\mu) &:= \mathbb{E}\left(\operatorname{am}\left[\hat{I}(\mu), h'(\mu)\right], h'(\mu)\right), \\ \tau(\mu) &:= \sqrt[4]{1 + 1/\mu^2}, \\ I_n(\mu) &:= \frac{1}{\pi} \int_0^\mu \frac{\ln(\sqrt{1+x^2} + x)}{\sqrt{1+x^2}} \frac{x^n}{\sqrt{\mu-x}} dx, \\ \hat{I}(\mu) &:= \sqrt[4]{1 + \mu^2} I_0(\mu). \end{aligned}$$

Die Module $h(\mu)$ und $h'(\mu)$ sind gegeben durch

$$h'(\mu) := \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{\mu}{\sqrt{1 + \mu^2}}\right)}$$

und ihre Relation $h^2 + h'^2 = 1$.

Die elliptischen Integrale erster und zweiter Art sind durch

$$\begin{aligned} F(\varphi, k) &:= \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \\ E(\varphi, k) &:= \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \end{aligned}$$

gegeben und die Jacobi'schen elliptischen Funktionen via

$$\begin{aligned} u &=: F(\varphi, k), \\ \operatorname{am}(u, k) &:= \varphi, \\ \operatorname{sn}(u, k) &:= \sin \varphi, \\ \operatorname{cn}(u, k) &:= \cos \varphi, \\ \operatorname{dn}(u, k) &:= \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}. \end{aligned}$$

ANHANG C

Notation und Einheiten

C.1. Zur Notation

Einheiten: $G = c = 1$, Newtonsche Gravitationskonstante G und Lichtgeschwindigkeit c , "geometrische Einheiten"

konform Unendlich: Λ entspricht $r = \infty$ siehe Def. 2.2.1 auf Seite 21

konforme Metrik, konformer Faktor: $\tilde{g} = \Omega^2 g$

Multipolmomente nach Geroch-Hansen: $Q_{a\dots b}^{M/J}$ bzw. $M_{a\dots b}$ und $J_{a\dots b}$ als Massen- und Strommomente, in Axialsymmetrie $Q_n^{M/J} = \frac{1}{n!} \cdot \underbrace{Q_{\zeta\dots\zeta}^{M/J}}_n$

Multipolmomente nach Fodor: $Q_n^{\text{Fod}} = M_n^{\text{Fod}} + iJ_n^{\text{Fod}}$

spezielle Momente: M Masse, J Drehimpuls, Q_2 Quadrupolmoment, in Teil 3 als Q bezeichnet

Multipoltensoren: $P_{ab\dots c}^{M/J}$, $Q_{ab\dots c}^{M/J} = P_{ab\dots c}^{M/J}|_{\Lambda}$

Multipoltensoren nach Fodor: $P_{a b c} = P_{a b c}^{\text{Fod}} = \underbrace{\rho\dots\rho}_a \underbrace{\zeta\dots\zeta}_b \underbrace{\varphi\dots\varphi}_c$, $S_{a b c} = P_{a b c} +$

$[g_{(i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_m)}]_{a b c}$, $P_{a b c}^{(n)}$: Tensor n -ter Stufe, $n = a + b + c$

Minkowski Raumzeit: $g = \eta_{ab} dx^a dx^b$

Metrik eines rotierenden Flüssigkeitskörpers im Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} g &= e^{-2U} [e^{2k}(d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 d\varphi^2] - e^{2U} (dt + ad\varphi)^2 \\ &= e^{2\alpha}(d\rho^2 + d\zeta^2) + W^2 e^{-2\nu} (d\varphi - \omega dt)^2 - e^{2\nu} dt^2 \end{aligned}$$

Killing Vektoren axialsymmetrisch stationärer Raumzeiten: $\xi = \partial_t$ und $\eta = \partial_\varphi$

Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit: $T_{ab} = (\epsilon + p)u_a u_b + p g_{ab}$ mit Geschwindigkeitsfeld u sowie Druck p und Energiedichte ϵ

Ernst-Potentiale: $f = e^{2U} + ib$, $\phi = \frac{1-f}{1+f}$

positiver Teil der Symmetrieachse: $A^+ := \{(\rho, \zeta) : \rho = 0, \zeta > 0\}$

Entwicklungskoeffizienten auf der Achse: $\phi|_{A^+} = \sum m_n \zeta^{-(n+1)}$

Quadrupol-Vermutung: $\left| \frac{J^2}{M \cdot Q} \right| \leq 1$

Verallgemeinerte Quadrupol-Vermutung: $\left| \frac{J^n}{M^{n-1} \cdot Q_n} \right| \leq 1$ mit $n \geq 2$.

Quadrupoldifferenz spheroidaler Körper: $\Delta m_2 = -\frac{1}{M^3} (m_2 - m_2^{\text{Kerr}})$

Gravitationsrotverschiebung: $z = \sqrt{\frac{g_{tt}|_{\Delta}}{g_{tt}|_{\partial}}} - 1$ mit der Sternoberfläche ∂

Komplexe Konjugation: $\overline{a + ib} = a - ib$, $a, b \in \mathbb{R}$

Summenkonvention: $T^a_a \equiv T^\alpha_\alpha$, i.A. kein Unterschied zwischen griechischen und lateinischen Indizes

Abbildungen: $\varphi : M \rightarrow S$, φ^* ist der Pull-Back, φ_* der Push-Forward, siehe [Jos05]

Laplace-Operator: $\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i [\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j f]$ mit $g = |\det(g)|$

Doppelfakultät: $n!! = \begin{cases} n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 2 & n \text{ gerade} \\ n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \dots \cdot 1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$

Kardinalität: $\text{card}(I) = n$, n ist die Mächtigkeit der Menge I

Querverweise: Definition 4.4.1, “Kapitel . Abschnitt . Nummer”

C.2. Umrechnung

In der gesamten Arbeit wurden Einheiten verwendet, in denen $c = G = 1$ gewählt wurde. Die Umrechnung der geometrischen Einheiten aus dem AKM-Programm hängt jedoch von der Zustandsgleichung ab. Die relevanten Umrechnungen sowie die dazu nötigen Größen in SI-Einheiten nach dem “Committee on Data for Science and Technology“ sollen hier aufgeführt werden. Zunächst die Naturkonstanten:

$$\begin{aligned} G &= 6,674 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}, \\ c &\equiv 299\,792\,458 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \\ M_\odot &= 1,989 \cdot 10^{30} \text{kg}. \end{aligned}$$

C.2.1. Homogene Zustandsgleichung und MIT-Bag-Modell. Die Umrechnungen für homogene Zustandsgleichungen entsprechen denen aus [Sch03], die für das MIT-Bag-Modell sind [Tei07] entnommen. Beide Skalierungen hängen zusammen, wenn man die Massendichte μ des homogenen Modells gegen einen mit $\frac{1}{c^2}$ -Faktor versehen Parameter B aus der Zustandsgleichung des MIT-Bag-Modells ersetzt, $\mu \rightarrow \frac{B}{c^2}$.

Größe	Einheit	Faktor	für $\mu = 10^{18} \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$	für $B = 60 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$
Länge	m	$\frac{c}{\sqrt{G\mu}}$	36,7 km	112,2 km
Zeit	s	$\frac{1}{\sqrt{G\mu}}$	122,4 μs	374,3 μs
Masse	kg	$\frac{c^3}{\sqrt{G^3\mu}}$	$4,94 \cdot 10^{31} \text{kg} = 24,7 M_\odot$	$1,51 \cdot 10^{32} \text{kg} = 76,0 M_\odot$
Drehimpuls	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$	$\frac{c^5}{G^2\mu}$	$5,44 \cdot 10^{44} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$	$5,08 \cdot 10^{45} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$
Energie	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	$\frac{c^5}{G^{3/2}\sqrt{\mu}}$	$4,44 \cdot 10^{48} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	$1,36 \cdot 10^{49} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$

C.2.2. Ideales Neutronengas. Es existiert offensichtlich in der Darstellung der Zustandsgleichung die Konstante

$$\tilde{K}_n := \frac{m_n^4}{24\pi^2 \hbar^3}.$$

In Anlehnung an polytrope Zustandsgleichungen wurde jedoch nicht diese zur einheitenlosen Darstellung innerhalb des AKM-Programms benutzt, sondern

$$K_n := \frac{1}{20} \tilde{K}_n^{-2/3},$$

vgl. [MAK⁺08]. Durch die Konstanz von \tilde{K}_n gibt es keinen freien Parameter mehr, die Skalierungen sind fixiert. Das Plancksche Wirkungsquantum und die Neutronenmasse sind gegeben durch

$$\begin{aligned}\hbar &= 1,054\,571\,6 \cdot 10^{-34} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}, \\ m_n &= 1,674\,927\,2 \cdot 10^{-27} \text{kg}.\end{aligned}$$

Damit ist $K_n = 5.380 \frac{\text{m}^4}{\text{kg}^{2/3} \text{s}^2}$ und es ergeben sich folgende Umrechnungen:

Größe	Einheit	Faktor	in Einheiten
Länge	m	$\frac{K_n^{3/4}}{\sqrt{c \cdot G}}$	4,44 km
Zeit	s	$\frac{K_n^{3/4}}{\sqrt{c^3 G}}$	14,81 μs
Masse	kg	$K_n^{3/4} \sqrt{\frac{c^3}{G^3}}$	$5,98 \cdot 10^{30} \text{kg} = 3,01 M_\odot$
Drehimpuls	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$	$K_n^{3/2} \frac{c^2}{G^2}$	$7,96 \cdot 10^{42} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$
Energie	$\frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$	$K_n^{3/4} \sqrt{\frac{c^7}{G^3}}$	$5,37 \cdot 10^{47} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$

Literaturverzeichnis

- [AKM02] M. Ansorg, A. Kleinwächter, and R. Meinel. Highly Accurate Calculation of Rotating Neutron Stars. *Astron. Astrophys.*, 381:L49, 2002.
- [AKM03] M. Ansorg, A. Kleinwächter, and R. Meinel. Highly Accurate Calculation of Rotating Neutron Stars: Detailed Description of the Numerical Methods. *Astron. Astrophys.*, 405:711, 2003.
- [AP08] M. Ansorg and H. Pfister. A universal constraint between charge and rotation rate for degenerate black holes surrounded by matter. *Classical and Quantum Gravity*, 25, 2008.
- [Bir23] G. D. Birkhoff. *Relativity and Modern Physics*. Harvard University Press, 1923.
- [BW71] J. M. Bardeen and R. V. Wagoner. Relativistic Disks. I. Uniform Rotation. *Astrophys. J.*, 167:359, 1971.
- [Cha04] S. Chandrasekhar. *The Mathematical Theory of Black Holes*. Clarendon Press, 2004.
- [CJJ+74] A. Chodos, R. L. Jaffe, K. Johnson, C. B. Thorn, and V. F. Weisskopf. New extended model of hadrons. *Phys. Rev.*, 9, 1974.
- [DS00] J. Dongarra and F. Sullivan. Top Ten Algorithms of the twentieth Century. *Computing in Science and Engineering*, 2, 2000.
- [Ern68] F. J. Ernst. New Formulation of the Axially Symmetric Gravitational Field Problem. *Phys. Rev.*, 167, 1968.
- [FHP89] G. Fodor, C. Hoenselaers, and Z. Perjés. Multipole Moments of Axisymmetric Systems in Relativity. *J. Math. Phys.*, 30(10):2252, 1989.
- [Fri08] H. Friedrich. Static vacuum solutions from convergent null data expansions at space-like infinity. *General Relativity and Quantum Cosmology*, 2008.
- [Ger70] R. Geroch. Multipole Moments. II. Curved Space. *J. Math. Phys.*, 11(8):2580, 1970.
- [Ger71] R. Geroch. A Method for Generating Solutions of Einstein's Equations. *J. Math. Phys.*, 12, 1971.
- [Gür83] Y. Gürsel. Multipole moments for stationary systems: The equivalence of the Geroch-Hansen formulation and the Thorne formulation. *General Relativity and Gravitation*, 15, 1983.
- [Han73] R. O. Hansen. Multipole Moments of Stationary Space-Times. *J. Math. Phys.*, 15(1):46, 1973.
- [Hei92] J. Heimberger. Schnell rotierende Körper in der allgemeinen Relativitätstheorie. Dissertation, Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, 1992.
- [Her67] W. C. Hernandez. Material Sources for the Kerr Metric. *Physical Review*, 159, 1967.
- [Heu96] M. Heusler. *Black Hole Uniqueness Theorems*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [HS67] J. B. Hartle and D. H. Sharp. Variational Principle for the Equilibrium of a Relativistic, Rotating Star. *Astrophys. J.*, 147:317, 1967.
- [HT68] J.B. Hartle and K.S. Thorne. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *The Astrophysical Journal*, 153, 1968.
- [Jac98] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics, Third Edition*. John Wiley & Sons, Inc., 1998.

- [Jos05] J. Jost. *Riemannian Geometry and Geometric Analysis, Fourth Edition*. Springer, 2005.
- [Ker63] R. P. Kerr. Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. *Phys. Rev. Lett.*, 11:237, 1963.
- [KMN95] A. Kleinwächter, R. Meinel, and G. Neugebauer. The Multipole Moments of the Rigidly Rotating Disk of Dust in General Relativity. *Phys. Lett. A*, 200:82, 1995.
- [Kra78] A. Krasinski. Ellipsoidal space-times, sources for the Kerr metric. *Annals of Physics*, 112, 1978.
- [Kun81] P. Kundu. Multipole expansion of stationary asymptotically flat vacuum metrics in general relativity. *J. Math. Phys.*, 22, 1981.
- [Lic33] L. Lichtenstein. *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten*. Springer, Berlin, 1933.
- [Mac01] C. Maclaurin. *A Treatise on Fluxions. In two volumes*. William Baynes & William Davis, London, second edition, 1801.
- [MAK⁺08] R. Meinel, M. Ansorg, A. Kleinwächter, G. Neugebauer, and D. Petroff. *Relativistic Figures of Equilibrium*. Cambridge University Press, Cambridge, 2008.
- [Mau09] F. Maucher. Lösungen der Ernst-Gleichung mit rationalem Achsen-Potential. Diplomarbeit, Friedrich Schiller Universität Jena, 2009. Arbeitstitel, noch nicht veröffentlicht.
- [MR98] V. S. Manko and E. Ruiz. Extended multi-soliton solutions of the Einstein field equations. *Class. Quantum Grav.*, 15, 1998.
- [NM93] G. Neugebauer and R. Meinel. The Einsteinian Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust. *Astrophys. J.*, 414:L97, 1993.
- [NM95] G. Neugebauer and R. Meinel. General Relativistic Gravitational Field of a Rigidly Rotating Disk of Dust: Solution in Terms of Ultraelliptic Functions. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3046–3047, October 1995.
- [Noe18] E. Noether. Invariante Variationsprobleme. *Gött. Nachr.*, 1918.
- [OV39] J. Oppenheimer and G. Volkov. On Massive Neutron Cores. *Phys. Rev.*, 55:374, 1939.
- [Pen64] R. Penrose. Conformal treatment of infinity. In C.M. DeWitt and B.S. DeWitt, editors, *Relativity, Groups and Topology. Relativité, Groupes et Topologie*, pages 565–584, New York, U.S.A., 1964. Gordon and Breach.
- [Pet03] D. Petroff. *Die Maclaurin-Ellipsoide in post-Newtonscher Näherung beliebig hoher Ordnung*. PhD thesis, Friedrich-Schiller-Universität, Jena, 2003.
- [PH08] D. Petroff and S. Horatschek. Uniformly rotating homogeneous and polytropic rings in newtonian gravity. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 389:156, 2008.
- [RH04] G. Rüdiger and R. Hollerbach. *The Magnetic Universe*. Wiley-VCH, 2004.
- [Rya95] F. D. Ryan. Gravitational waves from the inspiral of a compact object into a massive, axisymmetric body with arbitrary multipole moments. *Phys. Rev D.*, 52, 1995.
- [SA03] K. Schöbel and M. Ansorg. Maximal Mass of Uniformly Rotating Homogeneous Stars in Einsteinian Gravity. *Astron. Astrophys.*, 405:405, 2003.
- [SA06] T. P. Sotiriou and T. A. Apostolatos. Multipole moments as a tool to infer from gravitational waves the geometry around an axisymmetric body. In *Albert Einstein Century International Conference*, volume 861 of *American Institute of Physics Conference Series*, 2006.
- [SB83] W. Simon and R. Beig. The multipole structure of stationary space-times. *J. Math. Phys.*, 24, 1983.
- [Sch16] K. Schwarzschild. Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1:424, 1916.
- [Sch03] K. Schöbel. Die Grenzmasse homogener relativistischer Sternmodelle. Diplomarbeit, Friedrich Schiller Universität Jena, 2003.

- [ST83] Stuart L. Shapiro and Saul A. Teukolsky. *Black Holes, White Dwarfs and Neutron Stars: The Physics of Compact Objects*. Wiley-Interscience, 1983.
- [Ste04] H. Stephani. *Relativity*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [Sto32] E.C. Stoner. The minimum pressure of a degenerate electron gas. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 92, 1932.
- [Tei07] C. Teichmüller. Rotierende Quarksterne. Diplomarbeit, Friedrich Schiller Universität Jena, 2007.
- [Tho80] K. S. Thorne. Multipole expansions of gravitational radiation. *Reviews of Modern Physics*, 52, 1980.
- [Wal84] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago and London, 1984.
- [Wat07] Waterloo Maple Inc. Maple Version 11.0, 2007.
- [Wol08] Wolfram Research, Inc. Mathematica Version 6.0.2, 2008.
- [Xan79] B. C. Xanthopoulos. Multipole moments in general relativity. *J. Phys.*, 12, 1979.

Selbständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und nur unter
Zuhilfenahme der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt zu haben.

Seitens des Verfassers bestehen keine Einwände, die vorliegende Diplomarbeit
für die öffentliche Nutzung in der Thüringer Universitäts- und Landesbibliothek zur
Verfügung zu stellen.

Jena, den 13. November 2008

Robert Filter